Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **1** Hal. 1 – 6
ISSN : 2303–291X

BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF ULAT

AIDILLA DARMAWAHYUNI, NARWEN
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : ms.aidilladw@gmail.com

Abstrak. Bilangan kromatik lokasi dari G adalah minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan dari G. Untuk $1 \leq i \leq k$, kita defenisikan S_i merupakan himpunan dari titik yang diberi warna i. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik V merupakan vektor dengan banyak unsur k yaitu $(d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k))$, dimana $d(v, S_i)$ adalah jarak dari v ke S_i. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Graf Ulat adalah graf yang jika semua titik ujungnya dihilangkan akan menghasilkan lintasan [6]. Graf ulat didapatkan dengan menghubungkan titik pusat c dari subgraf bintang secara berurutan. Lintasan yang menghubungkan titik-titik daun dari barisan graf bintang disebut titik *backbone* dari graf ulat. Jika banyaknya titik daun sama maka graf tersebut merupakan graf ulat teratur, dinotasikan dengan $C_{m,n}$ dengan m adalah jumlah titik simpul dan n adalah jumlah titik daun. Pada tulisan ini, akan dikaji kembali disertasi [1] tentang bilangan kromatik lokasi dari graf ulat.

Kata Kunci: Pewarnaan Lokasi, Bilangan kromatik lokasi, Graf ulat

1. Pendahuluan

Seiring kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, banyak terdapat penelitian tentang graf diantaranya pewarnaan graf dan dimensi partisi. Pewarnaan graf dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah penjadwalan kuliah, yaitu dengan meminimalkan banyaknya warna yang digunakan untuk mewarnai setiap titik. Konsep dimensi partisi diperkenalkan oleh Chartrand dkk, pada tahun 1998 sebagai pengembangan dari konsep dimensi metrik. Perpaduan antara konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf melahirkan konsep bilangan kromatik lokasi graf. Bilangan kromatik lokasi merupakan salah satu kajian yang menarik sampai saat ini, beberapa peneliti telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf hasil operasi. Bilangan kromatik lokasi untuk pertama kalinya dikaji oleh Chartrand dkk. [4]. Hasil yang didapat antara lain pada graf lintasan, lingkaran, dan graf bintang ganda. Chartand dkk. [5] telah berhasil mengkonstruksi graf pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasinya bervariasi mulai dari 3 sampai dengan n, kecuali $n-1$. Baskoro dan Purwasih [2] telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi untuk perkalian korona dari dua buah graf, yaitu lintasan korona graf lengkap, lintasan korona komplemen graf lengkap, siklus korona komplemen graf lengkap, graf lengkap korona komplemen graf lengkap, dan graf lengkap korona graf lengkap.

2. Landasan teori

2.1. *Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf*

Suatu graf G adalah pasangan himpunan V dan E, dituliskan $G = (V, E)$, di mana V adalah suatu himpunan **titik** (*vertex*) yang tidak boleh kosong dan E adalah himpunan **sisi** (*edge*) dari V. Misalkan $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah himpunan titik yang berisi n titik di G dan $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ adalah himpunan sisi dengan m sisi di G. Subgraf dari graf $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf $H = (V(H), E(H))$ sedemikian sehingga $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$. Suatu subgraf dari G dapat diperoleh dengan menghapus suatu titik atau sisi di G.

Graf ulat adalah graf yang jika semua titik ujungnya dihilangkan akan menghasilkan lintasan [6]. Graf ulat didapatkan dengan menghubungkan titik pusat c dari subgraf bintang secara berurutan. Lintasan yang menghubungkan titik-titik daun dari barisan graf bintang disebut titik *backbone* dari graf ulat. Jika banyaknya titik daun sama maka graf tersebut merupakan graf ulat teratur, dinotasikan dengan $C_{m,n}$ dengan m adalah jumlah titik *backbone* dan n adalah jumlah titik daun.

2.2. *Dimensi Partisi*

Konsep dimensi partisi diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (1998), sebagai salah satu konsep yang menjadi latar belakang munculnya kromatik lokasi.

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf, $v \in V(G)$, dan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$ adalah $min\{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ dengan $S_1, S_2, \cdots, S_k$ kelas-kelas dari Π. Representasi v terhadap Π, dinotasikan dengan $r(v|\Pi)$, adalah koordinat $(d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, (v, S_k))$. Selanjutnya, Π disebut partisi pembeda dari $V(G)$ jika $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $u, v \in V(G)$. *Dimensi Partisi* dari G, dinotasikan dengan $pd(G)$ dengan nilai k terkecil sehingga G mempunyai partisi pembeda dengan k kelas.

2.3. *Pewarnaan Titik*

Teori pewarnaan graf merupakan suatu cabang teori graf yang mempelajari cara mewarnai suatu graf sedemikian sehingga tidak terdapat dua titik saling bertetangga pada pada graf tersebut yang berwarna sama. Pewarnaan titik adalah pemberian warna pada titik didalam graf sedemikian sehingga titik-titik bertetangga mempunyai warna berbeda. *Pewarnaan-k* titik sejati dari graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan $c : V \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$ sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v bertetangga. Bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan-k titik sejati disebut *bilangan kromatik* dari G, dinotasikan dengan $\chi(G)$. Jelas bahwa, untuk setiap graf G berorde n, berlaku $1 \leq \chi(G) \leq n$.

2.4. *Bilangan Kromatik Lokasi*

Suatu pewarnaan titik dengan k warna pada graf G adalah suatu pemetaan $c : V \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$ sehingga $c(u) \neq c(v)$ jika u dan v bertetangga. Jika banyaknya warna yang digunakan sebanyak k maka G dikatakan mempunyai k pewarnaan. Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga, jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π, maka c disebut pewarnaan lokasi (*locating coloring*) dari G. Oleh karena itu, pewarnaan lokasi pada graf G adalah pewarnaan yang membedakan setiap titik di G berdasarkan jaraknya terhadap kelas warna yang dihasilkan. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi (*locating chromatic number*).

2.5. *Teorema Pendukung*

Teorema 2.1. [4] *Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika terdapat u dan v dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \epsilon V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v tidak bertetangga sedemikian sehingga himpunan tetangga u dan v sama ($N(u) = N(v)$), maka $c(u) \neq c(v)$.*

Akibat 2.2. [5] *Misalkan G adalah graf terhubung. Jika G memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.*

Mudah untuk ditunjukkan bahwa $\chi_L(K_1) = 1$ dan $\chi_L(K_2) = 2$. Chartrand dkk. [4] telah memberikan batas atas dan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi untuk graf terhubung, seperti teorema berikut ini.

Teorema 2.3. [4] *Untuk setiap graf terhubung G berode $n \geq 3$ berlaku $3 \leq \chi_L(G) \leq n$.*

Bilangan kromatik lokasi suatu graf berhubungan erat dengan jarak suatu titik terhadap kelas-kelas warna. Akibatnya jarak titik yang paling jauh pada suatu graf juga memberikan pengaruh penentuan banyaknya warna minimum yang dibutuhkan dari pewarnaan lokasinya. Chartrand, dkk [4] menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa graf seperti lintasan, lingkaran, graf multipartit lengkap dan graf bintang ganda. Selain itu, bilangan kromatik lokasi dari suatu kelas graf pohon juga dikaji oleh Chartrand, dkk [5]. Mereka menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf pohon T_n dengan orde $n \geq 5$ dan menunjukkan bahwa bilangan kromatik lokasi dari graf pohon T_n adalah t, dimana $t \in$ [3,n] dan $t \neq n - 1$.

3. Pembahasan

Misalkan terdapat m buah graf Bintang K_{1,n_i} dengan $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Notasikan himpunan titik dari K_{1,n_i} dengan $V(K_{1,n_i}) = \{x_i, a_{ij} | 1 \leq j \leq n_i\}$, untuk $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ dan notasikan himpunan sisi dari K_{1,n_i} dengan $E(K_{1,n_i}) = \{x_i, a_{ij} | 1 \leq j \leq n_i\}$, untuk $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. Misal terdapat graf lintasan P_m, graf ulat diperoleh dengan menambahkan n_i titik pendan $(a_{ij}, j = 1, 2, \cdots, n_i)$ pada setiap titik x_i dari sebuah graf lintasan P_m dengan $1 \le i \le m$, dan dinotasikan dengan $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$. Jadi dapat dilihat bahwa $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ memuat m subgraf bintang K_{1,n_i} dengan x_i sebagai titik pusatnya. Jika $n_{\max} = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_m\}$, maka subgraf K_{1,n_i} disebut sebagai subgraf bintang maksimum pada graf ulat $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$. Dalam hal terdapat p subgraf K_{1,n_i}, maka masing-masing subgraf, dari kiri ke kanan, dinotasikan dengan K_{1,n_i} dengan $1 \le i \le p$.

Teorema 3.1. [4] *Misalkan $K_{1,n_{\max}}$ adalah subgraf bintang maksimum dari $C(m; n_1,\ n_2, \cdots, n_m)$ dan p menyatakan banyaknya subgraf $K_{1,n_{\max}}$. Maka, untuk $n_{\max} \ge 2$, bilangan kromatik lokasi graf ulat $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ adalah*

$$\chi_L(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)) = \begin{cases} n_{\max} + 1, \text{ jika } p \le n_{\max} + 1 \\ n_{\max} + 2, \text{ jika } p > n_{\max} + 1. \end{cases}$$

Bukti. Akan ditentukan batas bawah untuk $p \le n_{\max} + 1$. Karena banyaknya daun pada subgraf maksimum adalah $n_{\max}$, maka berdasarkan Akibat 2.2, $\chi_L(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)) \ge n_{\max} + 1$ untuk $p \le n_{\max} + 1$.

Definisikan pewarnaan-$(n_{\max} + 1)$ pada $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ sebagai berikut:

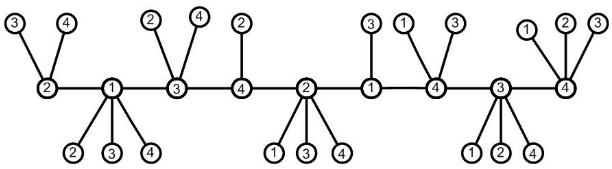
(1) Hitung banyaknya subgraf $K_{1,n_{\max}}$, dan nyatakan dengan p. Notasikan masing-masing subgraf tersebut, secara terurut dari kiri ke kanan, dengan $K^i_{1,n_{\max}}$, dengan $1 \le i \le p$,
(2) Titik-titik $x_i \in K^i_{1,n_{\max}}$, dengan $1 \le i \le p$, berturut-turut diwarnai dengan $1, 2, 3, \cdots, p$.
(3) Daun-daun di $K^i_{1,n_{\max}}$ dengan $1 \le i \le p$ diwarnai dengan $\{1, 2, 3, \cdots, n_{\max} + 1\} \setminus \{c(x_i)\}$,
(4) Definisikan A_1 sebagai selang terbuka sebelum graf bintang $K^1_{1,n_{\max}}$, A_{k+1} sebagai selang terbuka antara $K^k_{1,n_{\max}}$ dan $K^{k+1}_{1,n_{\max}}$, dengan $1 \le k \le p-1$, dan A_{p+1} sebagai selang terbuka setelah $K^p_{1,n_{\max}}$
(5) Definisikan himpunan $T = \{$semua kombinasi $(n_{\max})$ dari $n_{\max} + 1$ warna$\}$, sehingga $T = \{T_1, T_2, \cdots, T_{n_{\max}+1}\}$ dengan $T_i \in T$ adalah kombinasi yang tidak memuat warna i,
(6) Identifikasi letak subgraf K_{1,n_i} pada selang sebagaimana yang didefinisikan pada langkah 4,
(7) Jika K_{1,n_i} terletak pada selang A_1 atau A_2, maka setiap titik pada K_{1,n_i} secara berturut-turut diwarnai dengan warna-warna yang berasosiasi dengan T_1,
(8) Jika K_{1,n_i} terletak pada selang A_k, dengan $3 \le k \le p+1$, maka setiap titik pada K_{1,n_i}, secara berurut diwarnai dengan warna-warna yang berasosiasi dengan T_{k-1},
(9) Jika K_{1,n_i} dan K_{1,n_j} dengan $n_i = n_j$ berjarak sama terhadap subgraf bintang maksimum dan $\{c(a_{il}) | l = 1, 2, \cdots, n_i\} = \{c(a_{jl}) | l = 1, 2, \cdots, n_j\}$, maka x_i dan x_j harus diberi warna berbeda. Demikian juga sebaliknya, jika $c(x_i) = c(x_j)$, maka $\{c(a_{il}) | l = 1, 2, \cdots, n_i\} \ne \{c(a_{jl}) | l = 1, 2, \cdots, n_j\}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa kode warna dari setiap titik di $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ berbeda. Pandang sebarang dua daun berbeda $u \in V(K_{1,n_i})$

dan $v \in V(K_{1,n_j})$ dengan $c(u) = c(v)$.

- (◦) Jika $n_i = n_j = n_{\max} + 1$, maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$ karena terbedakan pada ordinat dari warna x_i dan x_j.
- (◦) Jika K_{1,n_i} dan K_{1,n_j}, berada dalam selang berbeda, misalnya A_p dan A_q, maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$ karena masing-masing mempunyai jarak berbeda terhadap C_p dan C_q.
- (◦) Jika K_{1,n_i} dan K_{1,n_j}, berada dalam selang sama, misalnya A_p tetapi tidak berjarak sama, maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$ karena terbedakan jaraknya ke C_p. Namun, jika berjarak sama, terbedakan oleh warna di x_i dan x_j.
- (◦) Jika salah satu dari n_i atau n_j adalah $n_{\max}$, misalnya $n_i = n_{\max}$ dan $n_j < n_{\max}$, maka kode warna dari u dan v terbedakan pada warna daun di K_{1,n_i} yang tidak termuat di K_{1,n_i}
- (◦) Jika $x_i \in V(K_{1,n_j})$ dan v mempunyai warna yang sama, maka $c_\Pi(x_i)$ memuat sedikitnya dua komponen bernilai 1, sedangkan untuk $c_\Pi(v)$ memuat tepat satu komponen benilai 1. Akibatnya $c_\Pi(x_i) \neq c_\Pi(v)$.

Berdasarkan semua kasus di atas, dapat dilihat bahwa kode warna untuk setiap titik di $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)) \leq n_{\max} + 1$ untuk $p \leq n_{\max} + 1$.



Gambar 1. Pewarnaan lokasi minimum dari $C(9; 2, 3, 2, 1, 3, 1, 2, 3, 3)$

.

Selanjutnya, akan ditentukan batas bawah untuk $p > n_{\max} + 1$. Dengan menggunakan kontradiksi, andaikan terdapat pewarnaan-$(n_{\max} + 1)$ lokasi c pada $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ untuk $p > n_{\max} + 1$. Karena $p > n_{\max} + 1$, maka terdapat $i, j, i \neq j$, sedemikian sehingga $\{c(a_{ih}) | h = 1, 2, \cdots, n_{\max}\} = \{c(a_{jh}) | h = 1, 2, \cdots, n_{\max}\}$. Akibatnya kode warna dari x_i dan x_j akan sama, suatu kontradiksi.

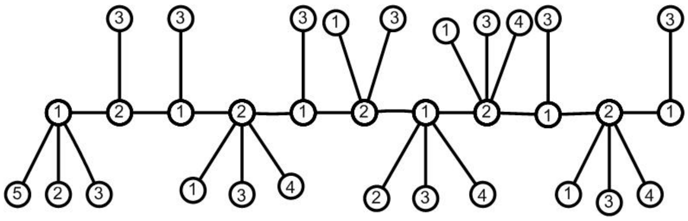
Definisikan pewarnaan-$(n_{\max} + 2)$ untuk $C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)$ sebagai berikut:

- (◦) $c(a_{11}) = n_{\max} + 2$,
- (◦) Warna untuk x_i adalah :

$$c(x_i) = \begin{cases} 1, & \text{jika } i \text{ ganjil,} \\ 2, & \text{jika } i \text{ genap.} \end{cases}$$

- (◦) Warna daun untuk $n_i = 1$ adalah 3, sedangkan untuk $n_i \geq 2$, $\{c(a_{ij}) | j = 1, 2, \cdots, n_i\}$, diberi warna $S \subseteq \{1, 2, \cdots, n_{\max} + 1\} \setminus \{c(x_i)\}$ untuk sebarang i.

Karena titik yang diberi warna $n_{\max} + 2$ unik dan terletak di ujung lintasan terpanjang, mengakibatkan kode warna dari setiap titik berbeda. Jadi c adalah pewarnaan lokasi pada $\chi_L(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)) \geq n_{\max} + 1$ untuk $p \leq n_{\max} + 1$. $\square$



Gambar 2. Pewarnaan lokasi minimum dari $C(11; 3, 1, 1, 3, 1, 2, 3, 3, 1, 3, 1)$

.

4. Kesimpulan

Pada tugas akhir ini penulis mengkaji kembali disertasi [1] mengenai bilangan kromatik lokasi dari graf ulat, dimana diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi dari graf ulat adalah:

$$\chi_L(C(m; n_1, n_2, \cdots, n_m)) = \begin{cases} n_{\max} + 1, & \text{jika } p \leq n_{\max} + 1, \\ n_{\max} + 2, & \text{jika } p > n_{\max} + 1. \end{cases}$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Drs. Syafruddin, M.Si dan Bapak Zulakmal, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran dalam penyempurnaan penulisan artikel ini.

Daftar Pustaka

[1] Asmiati, 2012, *Bilangan Kromatik Lokasi Graf Pohon dan Karakteristik Graf dengan bilangan Kromatik lokasi 3*, Disertasi Doktor (tidak diterbitkan), Program Studi Doktor Matematika Institut Teknologi Bandung, Bandung.
[2] Baskoro, E., dan Purwasih, I., 2012: The locating-cromatic number for corona product of graphs. *Southeast-Asian Journal of Sciences*, **Vol 1**(1) : 124 – 134
[3] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications.* Macmillan, London.
[4] Chartrand, G.,dkk. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull Inst. Combin.Appl.* **36**: 89 – 101
[5] Chartrand, G.,dkk. 2003. Graphs of order n with locating-chromatic number $n - 1$. *Discrete Math.* **269**: 65 – 79.
[6] Darmaji, 2011, *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung*, Disertasi Doktor (tidak diterbitkan), Program Studi Matematika Institut Teknologi Bandung, Bandung.
[7] Diestel, R., 2005, *Graph Theory*, Springer Verlag New York Inc., New York.