REALISASI POSITIF STABIL ASIMTOTIK SISTEM LINIER DISKRIT DENGAN POLE KONJUGAT KOMPLEKS

ISWAN RINA

*Program Studi Magister Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : mfahrinahat@yahoo.com*

Abstrak. Dalam artikel ini akan dikaji masalah realisasi positif stabil asimtotik dari suatu fungsi transfer yang memuat pole kompleks konjugat. Syarat perlu dan cukup untuk eksistensi realisasi positif stabil asimtotik disajikan.

Kata Kunci: Sistem linier diskrit, pole kompleks konjugat, realisasi positif stabil asimtotik

1. Pendahuluan

Diberikan sistem kontrol linier diskrit berikut

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t),\end{aligned}\tag{1.1}$$

dimana $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ dan $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$. Dalam sistem (1.1), $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaan (*state*), $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ menyatakan vektor *input* (kontrol), $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ menyatakan vektor *output*, dan $t \in \mathbb{Z}_+$. Sistem (1.1) dikatakan positif jika $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^n$ dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}_+^p$ untuk setiap kondisi awal $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_+^n$ dan semua *input* $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}_+^m$ [2, 5]. Dalam [1] dinyatakan bahwa sistem [1.1] adalah positif jika dan hanya jika $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ dan $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$. Sistem positif tersebut dikatakan stabil asimtotik jika $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ [2, 5].

Fungsi transfer sistem linier diskrit merupakan perbandingan antara transformasi-z dari persamaan *output* dengan transformasi-z dari persamaan *input* dengan mengasumsikan syarat awal sama dengan nol [3]. Sehingga, fungsi transfer sistem (1.1) adalah

$$T(z) = C[I_n z - A]^{-1} B + D.\tag{1.2}$$

Dari persamaan (1.2) dapat dilihat bahwa jika persamaan (1.1) diketahui, maka fungsi transfernya dapat ditentukan dengan mudah.

Selanjutnya, misalkan $T(z)$ diberikan. Jika terdapat matriks $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ dan $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ sedemikian sehingga

$$T(z) = C[I_n z - A]^{-1} B + D,\tag{1.3}$$

untuk matriks $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}$ dan $D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}$ ini, jika sistem terkait yaitu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t),\end{aligned}$$

memberikan $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ bila $t \rightarrow \infty$ untuk setiap $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_+^n$ maka matriks A , B , C , dan D tersebut disebut realisasi positif stabil asimtotik dari $T(z)$.

Diberikan suatu fungsi transfer $T(z)$ orde 3, yakni

$$T(z) = \frac{b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0},$$

yang memiliki sepasang pole konjugate kompleks dan satu pole riil, yaitu $z_1 = \alpha$, $z_2 = \alpha_1 + j\beta_1$ dan $z_3 = \alpha_1 - j\beta_1$.

Bagaimanakah syarat yang menjamin agar terdapat matriks

$$A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p \times m},$$

sedemikian sehingga

$$T(z) = C[I_n z - A]^{-1}B + D, \quad (1.4)$$

dan sistem kontrol yang terkait, yaitu

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t+1) &= A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t),\end{aligned}$$

memberikan $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ untuk setiap $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_+^n$?

Kajian tentang masalah realisasi positif maupun realisasi positif stabil asimtotik telah dilakukan oleh berbagai peneliti. Beberapa diantaranya adalah Kitano dan Maeda [7] yang melaporkan tentang realisasi positif dari sistem kontrol linier waktu diskrit dengan pendekatan geometri, Kaczorek yang mengkaji tentang realisasi positif sistem linier waktu kontinu untuk sistem SISO [6] dan realisasi positif untuk sistem linier waktu diskrit untuk SISO [5]. Dalam makalah ini akan dikaji kembali masalah realisasi positif stabil asimtotik dari sistem linier diskrit dengan pole konjugat kompleks, dimana fungsi transfer berorde 3.

2. Realisasi Positif Stabil Asimtotik dari Fungsi Transfer

Diberikan fungsi transfer sebagai berikut

$$T(z) = \frac{b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}, \quad (2.1)$$

yang mempunyai sepasang pole konjugat kompleks, dan satu pole riil.

Jika pole-pole dari persamaan (2.1) adalah $z_1 = \alpha$, $z_2 = \alpha_1 + j\beta_1$, dan $z_3 = \alpha_1 - j\beta_1$, maka bagian penyebut dari (2.1) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}d_3(z) &= (z - \alpha)(z - \alpha_1 + j\beta_1)(z - \alpha_1 - j\beta_1) \\ &= z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0,\end{aligned} \quad (2.2)$$

dimana

$$\begin{aligned} a_2 &= -2\alpha_1 - \alpha, \\ a_1 &= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + 2\alpha\alpha_1, \\ a_0 &= -\alpha(\alpha_1^2 + \beta_1^2). \end{aligned}$$

Definisi 2.1. [2, 5] Sistem (1.1) dikatakan positif jika untuk setiap $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_+^n$ dan untuk setiap $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}_+^m$, $t \geq 0$, berlaku $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^n$ dan $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}_+^p$.

Berdasarkan [3], solusi dari (1.1) diberikan sebagai berikut.

$$\mathbf{x}(t) = A^t \mathbf{x}(0) + \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B \mathbf{u}(k), \quad (2.3)$$

$$\mathbf{y}(t) = C A^t \mathbf{x}(0) + C \sum_{k=0}^{t-1} A^{t-k-1} B \mathbf{u}(k) + D \mathbf{u}(t), \quad t = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Definisi 2.2. [2, 5] Sistem (1.1) dikatakan stabil asimtotik jika

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \text{ untuk setiap } \mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Teorema 2.3. [2, 5] Sistem (1.1) adalah positif jika dan hanya jika

$$A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}, C \in \mathbb{R}_+^{p \times n}, D \in \mathbb{R}_+^{p \times m}. \quad (2.5)$$

Teorema 2.4. [2, 5] Sistem positif (1.1) adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika semua nilai eigen $z_1, z_2, \dots, z_n$ dari matriks $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ mempunyai modulo yang kurang dari 1, yaitu

$$|z_i| < 1 \text{ untuk } i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.6)$$

Lema 2.5. [1, 9] Diberikan matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}. \quad (2.7)$$

Matriks A adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika semua koefisien dari polinomial

$$\bar{d}_3(w) = d_3(w+1) = w^3 + \bar{a}_2 w^2 + \bar{a}_1 w + \bar{a}_0 \quad (2.8)$$

dimana

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 &= 3 + a_2, \\ \bar{a}_1 &= 3 + 2a_2 + a_1, \\ \bar{a}_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + 1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

adalah positif.

Bukti. Matriks A adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika matriks $A - I_3 \in M_{3s}$. Selain itu $A - I_3 \in M_{3s}$ jika dan hanya jika koefisien-koefisien dari polinomial karakteristik adalah positif, yaitu

$$\bar{d}_3(w) = w^3 + \bar{a}_2 w^2 + \bar{a}_1 w + \bar{a}_0 \quad (2.10)$$

dimana

$$\begin{aligned}\det[I_3 w - (A - I_3)] &= \det[I_3(w + 1) - A] \\ &= (w + 1)^3 + a_2(w + 1)^2 + a_1(w + 1) + a_0, \\ &= w^3 + \bar{a}_2 w^2 + \bar{a}_1 w + \bar{a}_0.\end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned}\bar{a}_2 &= 3 + a_2, \\ \bar{a}_1 &= 3 + 2a_2 + a_1, \\ \bar{a}_0 &= a_0 + a_1 + a_2 + 1.\end{aligned}$$

Perhatikan matriks berikut.

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}.$$

Polinomial karakteristik dari A_1 adalah

$$\det[I_3 z - A_1] = \begin{bmatrix} z - a_{11} & -1 & -a_{13} \\ 0 & z - a_{22} & -a_{23} \\ -1 & 0 & z - a_{33} \end{bmatrix} = z^3 - a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad (2.11)$$

dimana

$$\begin{aligned}a_2 &= (a_{11} + a_{22} + a_{33}) \\ a_1 &= a_{11}(a_{22} + a_{33}) + a_{22}a_{33} - a_{13},\end{aligned} \quad (2.12)$$

$$a_0 = -a_{11}a_{22}a_{33} + a_{22}a_{13} - a_{23}. \quad (2.13)$$

Jika a_0, a_2, a_1 diketahui dan dengan memilih a_{11}, a_{22}, a_{33} sedemikian sehingga $a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_2$ maka dari persamaan (2.12) diperoleh

$$\begin{aligned}a_{13} &= a_{11}(a_{22} + a_{33}) + a_{22}a_{33} - a_1, \\ a_{23} &= -a_{11}a_{22}a_{33} + a_{22}a_{13} - a_{23}.\end{aligned} \quad \square$$

Teorema 2.6. *Terdapat realisasi positif stabil asimtotik*

$$\begin{aligned}\bar{A}_k &= PA_k P^{-1} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}, \\ \bar{B}_k &= PB_k \in \mathbb{R}_+^{n \times 1}, \\ \bar{C}_k &= C_k P^{-1} \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}, \\ \bar{D}_k &= D_k = [b_3] \in \mathbb{R}_+, k = 1, 2.\end{aligned} \quad (2.14)$$

untuk sebarang matriks monomial $P \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ dimana matriks A_k, B_k, C_k, D_k berben-

tuk salah satu dari yang berikut

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} b_1 + (a_{11} + a_{22})b_2 - [(a_{11} + a_{22})a_2 + a_1]b_3 \\ b_0 + a_{22}b_1 + a_{22}^2b_2 - (a_0 + a_{22}^2a_2 + a_{22}a_1)b_3 \\ b_2 - a_2b_3 \end{bmatrix}, \\ C_1 &= [0 \ 0 \ 1], \quad D_1 = b_3, \end{aligned} \quad (2.15)$$

atau

$$A_2 = A_1^T, \quad B_2 = C_1^T, \quad C_2 = B_1^T, \quad D_2 = D_1 \quad (2.16)$$

dari fungsi transfer (2.1) jika dan hanya jika

$$a_2^2 - 3a_1 > 0, \quad 2a_2^3 - 9a_1a_2 - 27a_0 > 0, \quad (2.17)$$

$$a_2 < 0, \quad 3 + a_2 > 0, \quad 3 + 2a_2 + a_1 > 0, \quad a_0 + a_1 + a_2 + 1 > 0, \quad (2.18)$$

dan

$$\begin{aligned} b_1 + (a_{11} + a_{22})b_2 - [(a_{11} + a_{22})a_2 + a_1]b_3 &\geq 0, \\ b_0 + a_{22}b_1 + a_{22}^2b_2 - (a_0 + a_{22}^2a_2 + a_{22}a_1)b_3 &\geq 0, \\ b_2 - a_2b_3 &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Bukti. Berdasarkan Lema 2.5 dan (2.6), matriks A_1 adalah stabil asimtotik jika dan hanya jika syarat (2.18) terpenuhi.

Pilih $a_{11} = a_{22} = a_{33}$, maka diperoleh

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = -\frac{a_2}{3},$$

$$a_{13} = 3\left(\frac{a_2^2}{9}\right)^2 - a_1 \geq 0, \quad \text{atau} \quad a_2^2 - 3a_1 \geq 0.$$

$$a_{23} = 2\frac{a_2}{27} - \frac{a_1a_2}{3} - a_0 \geq 0, \quad \text{atau} \quad 2a_2^3 - 9a_1a_2 - 27a_0 > 0.$$

Terdapat $a_{13} > 0$ dan $a_{23} > 0$ jika dan hanya jika kondisi dari persamaan (2.18) terpenuhi. Matriks

$$D_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = b_3 \in \mathbb{R}_+^{1 \times 1} \quad (2.20)$$

jika dan hanya jika $b_3 > 0$.

Fungsi transfer stricly proper mempunyai bentuk

$$T_{sp}(z) = T(z) - D_1 = \frac{\bar{b}_2 z^2 + \bar{b}_1 z + \bar{b}_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}. \quad (2.21)$$

Jadi

$$\begin{aligned} T_{sp}(z) &= T(z) - D_1, \\ &= \frac{b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} - \lim_{z \rightarrow \infty} T(z), \\ &= \frac{\bar{b}_2 z^2 + \bar{b}_1 z + \bar{b}_0}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} \end{aligned} \quad (2.22)$$

dimana

$$\bar{b}_2 = b_2 - a_2 b_3, \bar{b}_1 = b_1 - a_1 b_3, \bar{b}_0 = b_0 - a_0 b_3. \quad (2.23)$$

Dengan mengasumsikan

$$C_1 = [0 \ 0 \ 1]$$

diperoleh

$$\begin{aligned} T_{sp}(z) &= C_1 [I_3 z - A_1]^{-1} B_1 \\ &= [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & 1 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{bmatrix} \\ &= \frac{b_{13} z^2 [b_{11} - (a_{11} + a_{12}) b_{13}] z + b_{12} - a_{22} b_{11} + a_{11} a_{22} b_{13}}{z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dengan membandingkan persamaan (2.20) dengan (2.23), diperoleh

$$\begin{aligned} b_{13} &= \bar{b}_2 = b_2 - a_2 b_3 \\ b_{11} &= \bar{b}_1 + (a_{11} + a_{22}) b_{13}, \\ b_{12} &= \bar{b}_0 + a_{22} b_{11} - a_{11} a_{22} b_{13} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dari persamaan (2.15) diperoleh bahwa $B_1 \in \mathbb{R}_+^{3 \times 1}$ jika dan hanya jika kondisi (2.20) terpenuhi. Berdasarkan matriks (2.14) realisasi positif stabil asimtotik untuk sebarang matriks monomial $P \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ jika dan hanya jika matriks dari persamaan (2.15) adalah realisasi positif stabil asimtotik. $\square$

3. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Muhafzan, Bapak Dr. Admi Nazra, Ibu Dr. Lyra Yulianti, Ibu Dr. Maiyastri, dan Ibu Dr. Yanita yang telah memberikan masukan dan saran, sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Kedelapan. Jilid 1. Erlangga, Jakarta.
- [2] Farina, L and Rinaldi, S. 2000. *Positive Linear Systems*. John Wiley and Sons, New York.
- [3] Hendricks, E, Jannerup, O dan Sensen, P. H. 2008. *Linear System Control*. Springer, Verlag Berlin Heidelberg.
- [4] Kaczorek, T. 1991. *Linear Control System*. Vol. 1. Research Studies Press, England.
- [5] Kaczorek, T. 2002. *Positive 1D and 2D Systems*. Springer-Verlag, London.
- [6] Kaczorek, T. 2012. Positive Stable Realizations of Discrete-time Linear System. *Buletin of the Polish Academy of Sciences*, Vol. 60, No. 3
- [7] Kitano, T, dan Maeda, H. 1998. Positive Realization of Discrete-Time Systems by Geometric Approach. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. Vol.45 (3): 308 – 311

- [8] Kwakernaak, H. 1972. *Linear Optimal Control System*. John Wiley and Son, Inc. Canada.
- [9] Ogata, K. 1995. *Discrete-Time Control Systems*. Prentice Hall, New Jersey.