Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **1** Hal. 34 – 40
ISSN : 2303–291X

PELABELAN TOTAL TITIK AJAIB PADA GRAF LENGKAP DENGAN METODE MODIFIKASI MATRIK BUJURSANGKAR AJAIB DENGAN n GANJIL, $n \geq 3$

ASMANELITA FAIZASARI, NARWEN, EFENDI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : faizasari@gmail.com

Abstrak. Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif. Dalam tulisan ini akan dibahas bagaimana memberikan pelabelan total titik ajaib pada graf lengkap K_n, n ganjil, $n \geq 3$ dengan metode matrik bujursangkar ajaib. Hasil modifikasi matrik bujursangkar ini akan digunakan untuk melabelkan titik dan sisi dari graf lengkap K_n, dimana elemen diagonal utama untuk label titik dan elemen lainnya untuk label sisi.

Kata Kunci: Pelabelan total titik ajaib, matriks bujursangkar ajaib, graf lengkap

1. Pendahuluan

Graf dapat diartikan sebagai kumpulan titik *(nodes)* yang dihubungkan satu sama lain melalui sisi atau busur *(edges)*. Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titiknya bertetangga ke semua titik lainnya. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n. Setiap titik pada K_n berderajat $n-1$.

Dalam teori graf, pelabelan menjadi topik yang banyak mendapat perhatian, karena model-model yang ada pada pelabelan graf berguna untuk aplikasi yang luas, seperti dalam masalah jaringan internet, sistem alamat jaringan komunikasi dan desain sirkuit. Pelabelan merupakan pemetaan bijektif yang memasangkan unsur-unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan bulat positif yang disebut label.

2. Pelabelan Pada Graf

Pelabelan pada suatu graf merupakan pemetaan yang memasangkan elemen-elemen graf dengan bilangan bulat positif. Jika *domain* (daerah asal) dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut **pelabelan titik** *(vertex labeling)*, jika *domain* dari pemetaan adalah sisi maka disebut **pelabelan sisi** *(edge labeling)*, dan jika *domain* dari pemetaan adalah titik dan sisi maka disebut **pelabelan total** *(total labeling)*.

Misalkan G adalah suatu graf dengan himpunan titik V dan sisi E. Banyaknya sisi di G adalah e dan banyaknya titik di G adalah v. Secara matematis pelabelan total titik ajaib *(vertex magic total labeling)* pada suatu graf (V, E) dengan banyak sisi e dan banyak titik v adalah pemetaan satu-satu

$$f : E \cup V \to \{1, 2, \cdots, e + v\},$$

sehingga untuk masing-masing titik x dan masing-masing sisi xy di G berlaku

$$f(x) + \sum f(xy) = k, \text{ untuk suatu konstanta } k.$$

Pelabelan total titik ajaib dapat dimaknai sebagai jumlah label suatu titik dan label sisi-sisi yang terkait pada titik tersebut adalah sama untuk semua titik.

3. Metode Bujursangkar Ajaib

Matrik bujursangkar ajaib berukuran $n \times n$ dengan n bilangan ganjil dan $n \geq 3$ adalah menggunakan elemen-elemen matrik tersebut dari 1 sampai n^2 sedemikian sehingga setiap baris, kolom dan diagonal utama mempunyai jumlah yang sama. Metode bujursangkar adalah metode paling klasik dan mudah dalam mengkonstruksi bujursangkar ajaib berukuran $n \times n$ dengan n bilangan ganjil dengan $n \geq 3$.

Algoritma untuk mengisi elemen dari matrik bujursangkar M berukuran $n \times n$ adalah sebagai berikut:

(1) Masukkan ukuran dari matrik M, yaitu dengan n ganjil, $n \geq 3$.
(2) Nolkan elemen-elemen dari matrik m_{ji}, yaitu $m_{ji} \leftarrow 0,\ i = 1, 2, 3, \cdots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \cdots, n$.
(3) Set nilai $i \leftarrow (n\ div\ 2) + 1,\ j \leftarrow 1$ dan indeks $\leftarrow 1$. Dalam hal ini i menyatakan kolom dan j menyatakan baris.
(4) Selama nilai indeks $\leq n^2$ maka lakukan
   (a) Jika $m_{ji} = 0$ maka $m_{ji} \leftarrow$ indeks.
   (b) $i \leftarrow i + 1,\ j \leftarrow j - 1$ dan indeks $\leftarrow$ indeks + 1.
   (c) Jika $(i = n + 1)$ dan $(j = 0)$ maka $i \leftarrow n,\ j \leftarrow 2$.
   (d) Jika $i > n$ maka $i \leftarrow 1$.
   (e) Jika $j < 1$ maka $j \leftarrow n$.
   (f) Jika $m_{ji} \neq 0$ maka
      (i) $i \leftarrow i - 1,\ j \leftarrow j + 2$.
      (ii) Jika $i < 1$ maka $i \leftarrow n$.
      (iii) Jika $j > n$ maka $j \leftarrow 1$.
   (g) Ulangi langkah (4).

Jumlah ajaibnya adalah jumlah bilangan dari $1, 2, \cdots, n^2$ dibagi dengan banyak kolom atau banyak baris sehingga diperoleh

$$\frac{1 + 2 + \cdots + n^2}{n} = \frac{\frac{1}{2}n^2(n^2 + 1)}{n} = \frac{1}{2}n(n^2 + 1).$$

4. Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Graf Lengkap K_n dengan n Ganjil

Untuk graf lengkap K_n dengan $n = 1$ tidak diperlukan langkah-langkah untuk melabelinya, sementara untuk $n > 1$ diperlukan langkah-langkah.

Modifikasi algoritma untuk mengisi elemen-elemen matrik bujursangkar M berukuran $n \times n$ dengan $n \geq 3$ menjadi algoritma pelabelan total titik ajaib pada graf lengkap K_n, dengan n ganjil:

(1) Masukkan ukuran dari matrik M, yaitu dengan n ganjil, $n \geq 3$.
(2) Nolkan elemen-elemen dari matrik M_{ji}, yaitu $m_{ji} \leftarrow 0,\ i = 1, 2, 3, \cdots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \cdots, n$.
(3) Set nilai $i \leftarrow (n\ div\ 2) + 1,\ j \leftarrow (n\ div\ 2)$ dan indeks $\leftarrow 1$. Dalam hal ini i menyatakan kolom dan j menyatakan baris.
(4) Selama nilai indeks $\leq \dfrac{n(n+1)}{2}$ maka lakukan
  (a) Jika $m_{ji} = 0$ maka $m_{ji} \leftarrow$ indeks.
  (b) $i \leftarrow i + 1,\ j \leftarrow j - 1$ dan indeks $\leftarrow$ indeks $+1$.
  (c) Jika $(i = n + 1)$ dan $(j = 0)$ maka $i \leftarrow n,\ j \leftarrow 2$.
  (d) Jika $i > n$ maka $i \leftarrow 1$.
  (e) Jika $j < 1$ maka $j \leftarrow n$.
  (f) Jika $m_{ji} \neq 0$ maka
    (i) $i \leftarrow i - 1,\ j \leftarrow j - 1$.
    (ii) Jika $i < 1$ maka $i \leftarrow n - i$.
    (iii) Jika $j < 1$ maka $j \leftarrow n - j$.
  (g) Ulangi langkah (4).
(5) Berikan label untuk titik-titik dari graf lengkap K_n dengan n bilangan terbesar dari nilai-nilai label yang berikan. Atau elemen-elemen yang ada di diagonal utama matrik bujursangkar yang diperoleh. Sedangkan label sisi yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j adalah elemen m_{ij} tidak sama dengan 0 atau $m_{ji} \neq 0$, dengan $i \neq j$.

5. Penerapan Pelabelan Total Titik Ajaib Pada Graf Lengkap K_n dengan n Ganjil

Diberikan pelabelan graf lengkap K_5. Karena $n = 5$ berarti angka yang digunakan dalam pelabelan adalah dari 1 sampai 15. Graf lengkap V_5 dengan himpunan titik $V(K_5) = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ direpresentasikan menjadi matrik bujursangkar berukuran $n \times n$ dengan $n = 5$, diperoleh matrik

$$M(K_5) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix}.$$

Menggunakan algoritma diatas akan diisi elemen-elemen dari matrik M.

(1) Diberikan $n = 5$, sehingga matrik M berukuran 5×5.
(2) Nolkan elemen-elemen dari matrik $m_{ji},\ i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan $j = 1, 2, 3, 4, 5$.
(3) Set nilai $i \leftarrow 3,\ j \leftarrow 2$ dan indeks $\leftarrow 1$.
(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan
  (a) Karena $m_{23} = 0$ maka $m_{23} \leftarrow 1$.
  (b) $i \leftarrow 4,\ j \leftarrow 1$ dan indeks $\leftarrow 2$.
  (g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

  (a) Karena $m_{14} = 0$ maka $m_{14} \leftarrow 2$.
  (b) $i \leftarrow 5,\ j \leftarrow 0$ dan indeks $\leftarrow 3$.
  (e) Karena $j < 1$ maka $j \leftarrow 5$.
  (g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

  (a) Karena $m_{55} = 0$ maka $m_{55} \leftarrow 3$.
  (b) $i \leftarrow 6,\ j \leftarrow 4$ dan indeks $\leftarrow 4$.
  (d) Karena $i > 5$ maka $i \leftarrow 1$.
  (g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

  (a) Karena $m_{41} = 0$ maka $m_{41} \leftarrow 4$.
  (b) $i \leftarrow 2,\ j \leftarrow 3$ dan indeks $\leftarrow 5$.
  (g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

  (a) Karena $m_{32} = 0$ maka $m_{32} \leftarrow 5$.
  (b) $i \leftarrow 3,\ j \leftarrow 2$ dan indeks $\leftarrow 6$.
  (f) Karena $m_{23} \neq 0$ maka

    (i) $i \leftarrow 2,\ j \leftarrow 1$.

  (g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

  (a) Karena $m_{12} = 0$ maka $m_{12} \leftarrow 6$.
  (b) $i \leftarrow 3,\ j \leftarrow 0$ dan indeks $\leftarrow 7$.
  (e) Karena $j < 1$ maka $j \leftarrow 5$.
  (g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

  (a) Karena $m_{53} = 0$ maka $m_{53} \leftarrow 7$.
  (b) $i \leftarrow 4,\ j \leftarrow 4$ dan indeks $\leftarrow 8$.
  (g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

  (a) Karena $m_{44} = 0$ maka $m_{44} \leftarrow 8$.
  (b) $i \leftarrow 5,\ j \leftarrow 3$ dan indeks $\leftarrow 9$.
  (g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

  (a) Karena $m_{35} = 0$ maka $m_{35} \leftarrow 9$.
  (b) $i \leftarrow 6,\ j \leftarrow 2$ dan indeks $\leftarrow 10$.
  (d) Karena $i > 5$ maka $i \leftarrow 1$.
  (g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

  (a) Karena $m_{21} = 0$ maka $m_{21} \leftarrow 10$.

(b) $i \leftarrow 2,\ j \leftarrow 1$ dan indeks $\leftarrow 11$.

(f) Karena $m_{12} \neq 0$ maka

(I) $i \leftarrow 1,\ j \leftarrow 0$.

(II) Karena $j < 1$ maka $j \leftarrow 5$.

(g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

(a) Karena $m_{51} = 0$ maka $m_{51} \leftarrow 11$.

(b) $i \leftarrow 2,\ j \leftarrow 4$ dan indeks $\leftarrow 12$.

(g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

(a) Karena $m_{42} = 0$ maka $m_{42} \leftarrow 12$.

(b) $i \leftarrow 3,\ j \leftarrow 3$ dan indeks $\leftarrow 13$.

(g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

(a) Karena $m_{33} = 0$ maka $m_{33} \leftarrow 13$.

(b) $i \leftarrow 4,\ j \leftarrow 2$ dan indeks $\leftarrow 14$.

(g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

(a) Karena $m_{24} = 0$ maka $m_{24} \leftarrow 14$.

(b) $i \leftarrow 5,\ j \leftarrow 1$ dan indeks $\leftarrow 15$.

(g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks ≤ 15 maka lakukan

(a) Karena $m_{15} = 0$ maka $m_{15} \leftarrow 15$.

(b) $i \leftarrow 6,\ j \leftarrow 0$ dan indeks $\leftarrow 16$.

(c) Karena $(i = 6)$ dan $(j = 0)$ maka $i \leftarrow 5,\ j \leftarrow 2$.

(g) Ulangi langkah (4).

(4) Karena nilai indeks $\nleq 15$ maka selesai.

Dengan demikian diperoleh elemen-elemen dari matrik

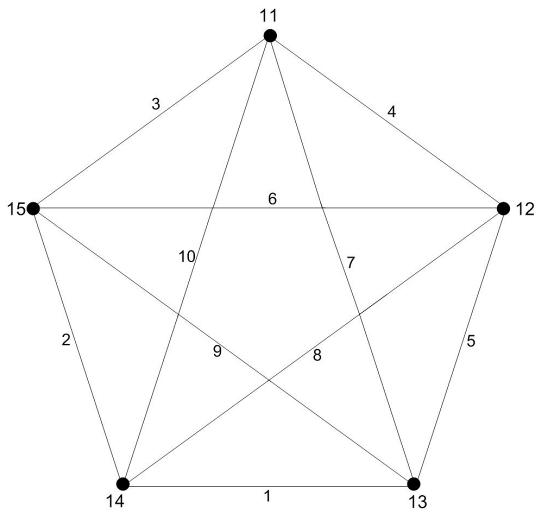
$$M(K_5) = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 2 & 15 \\ 10 & 0 & 1 & 14 & 0 \\ 0 & 5 & 13 & 0 & 9 \\ 4 & 12 & 0 & 8 & 0 \\ 11 & 0 & 7 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

5 Ini berarti label untuk titik $v_1 = 11$, $v_2 = 12$, $v_3 = 13$, $v_4 = 14$, $v_5 = 15$. Dan label sisi $v_1v_2 = 4$, $v_1v_3 = 7$, $v_1v_4 = 10$, $v_1v_5 = 3$, $v_2v_3 = 5$, $v_2v_4 = 8$, $v_2v_5 = 6$, $v_3v_4 = 1$, $v_3v_5 = 9$, $v_4v_5 = 2$, seperti dapat dilihat pada Gambar 1.

Jumlah bilangan perkolom yang merupakan konstanta ajaib untuk pelabelan graf lengkap dengan orde 5, K_5 adalah konstanta yang sama, yaitu berjumlah $k = 35$. Penggambaran Pelabelan total titik ajaib graf lengkap K_5 diberikan pada Gambar 2.

Label titik	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
	11	12	13	14	15
Label sisi	3	4	1	1	2
	4	5	5	2	3
	7	6	7	8	6
	10	8	9	10	9

Gambar 1. Tabel label titik dan label sisi



Gambar 2. Pelabelan total titik ajaib graf lengkap K_5

6. Kesimpulan

Pelabelan graf merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan himpunan dari elemen-elemen graf ke himpunan bilangan bulat positif. Pelabelan total titik ajaib pada graf lengkap K_n, n bilangan ganjil dan $n \geq 3$, hampir sama dengan konstruksi bujursangkar ajaib M_n orde n. Rumus umum untuk mencari pelabelan total titik ajaib graf K_n adalah bilangan dari 1 sampai dengan $\frac{n(n+1)}{2}$ dengan n bilangan ganjil. Hasil modifikasi matrik bujursangkar ajaib ini akan digunakan untuk melabelkan titik dan sisi dari graf lengkap K_n, dimana elemen diagonal utama untuk label titik dan elemen lainnya untuk label sisi.

Daftar Pustaka

[1] Irawati, N. B., dan H. Robertus, (2010), *Pelabelan total titik ajaib pada graf lengkap K_n dengan n ganjil* Vol. 13, No. 3, Desember 2010 : 136 – 142

[2] Cahyono, H., 2004, *Formula Analitik Konstruksi Persegi Ajaib*, DPP UMM,

Malang.
[3] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London.
[4] McDougall, Miller, Slamin, and Wallis, (2002), *Vertex Magic Total Labeling of Graphs*. Util. Math, 61 : 3 – 21.