Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **1** Hal. 82 – 89
ISSN : 2303–291X

TINGKATAN SUBGRUP DARI SUBHIMPUNAN *FUZZY*

AFIFAH RAHAYU, NOVA NOLIZA BAKAR
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : bridge_qheart@yahoo.com

Abstrak. Pada tulisan ini akan dibahas tingkatan subgrup pada subhimpunan *fuzzy*. Untuk ini diperlukan konsep-konsep tentang subgrup, subhimpunan *fuzzy*, dan subgrup *fuzzy*. Misalkan G adalah grup dan μ adalah subhimpunan *fuzzy* dari G dan misal μ_t adalah tingkatan subhimpunan dari subhimpunan *fuzzy* μ untuk setiap $t \in$ [0,1] dengan $t \leq \mu$ (e), maka μ_t adalah subgrup dari G jika dan hanya jika μ adalah subgrup *fuzzy* dari G.

Kata Kunci: Tingkatan subgrup, subhimpunan *fuzzy*, subgrup, subgrup *fuzzy*, dan tingkatan subhimpunan dari subhimpunan *fuzzy*

1. Pendahuluan

Grup *fuzzy* didefinisikan sebagai (G, R) dengan G adalah himpunan tak kosong dan R adalah operasi biner *fuzzy* pada G yang memenuhi beberapa aksioma-aksioma tertentu [6]. Suatu subgrup *fuzzy* didefinisikan sebagai suatu subhimpunan *fuzzy* yang memenuhi dua aksioma [1]. Selanjutnya, tingkatan subgrup (μ_t) adalah suatu himpunan yang elemen-elemennya dipetakan oleh μ ke t dengan $t \in$ [0,1][1]. Sedangkan subhimpunan *fuzzy* itu sendiri adalah suatu fungsi yang memetakan suatu himpunan tak kosong ke interval [0,1][1].

Lema 1.1. [2] *Misalkan G adalah grup, $H \subset G$ dan $H \neq \emptyset$. Himpunan H adalah subgrup dari G jika dan hanya jika:*

(1) Untuk setiap $a, b \in H$, maka $ab \in H$.
(2) Untuk setiap $a \in H$, maka $a^{-1} \in H$.

Definisi 1.2. [5] *Misalkan E suatu himpunan sederhana dan $A \subset E$. Pengertian keanggotaan ini dapat dinyatakan melalui konsep fungsi karakteristik μ_A, dengan:*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A, \\ 0, x \notin A. \end{cases}$$

2. Subgrup *Fuzzy* dan Tingkatan Subhimpunan dari Subhimpunan *Fuzzy*

Definisi 2.1. [1] *Misalkan X suatu himpunan tak kosong. Suatu subhimpunan fuzzy μ dari X adalah fungsi $\mu : X \rightarrow [0, 1]$.*

Contoh 2.2. Misalkan himpunan $X = \{a, b, c, d, e\}$ dan himpunan $A = \{a, b, e\}$. Misalkan $\mu : X \to [0, 1]$. Akan ditentukan subhimpunan *fuzzy* μ dari X dengan

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, \, x \in A, \\ 0, \, x \notin A. \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $\mu_A(a) = 1$, $\mu_A(b) = 1$, $\mu_A(c) = 0$, $\mu_A(d) = 0$, dan $\mu_A(e) = 1$. Dari definisi sebelumnya diperoleh bahwa μ merupakan subhimpunan *fuzzy* dari X.

Definisi 2.3. [*1*] *Misalkan G adalah sebuah grup. Subhimpunan fuzzy μ dikatakan subgrup fuzzy dari G jika:*

(1) $\mu(xy) \geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}$,
(2) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$,

untuk setiap $x, y \in G$.

Contoh 2.4. Diketahui himpunan $G = \{a, b, c, d\}$ adalah suatu grup. Misalkan $\mu : G \to [0, 1]$ sedemikian sehingga $\mu(a) = 0,8$, $\mu(b) = 0,5$; $\mu(c) = 0,7$; dan $\mu(d) = 0,5$ adalah subhimpunan *fuzzy* dari G. Akan ditunjukkan subhimpunan *fuzzy* μ adalah subgrup *fuzzy* dari G, dengan $G \times G \in G$. Misalkan $G = \{a, b, c, d\}$ adalah suatu grup, maka $G \times G$ adalah seperti pada Gambar 1 berikut.

×	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Gambar 1. $G \times G$

Berdasarkan tabel pada Gambar 1 diperoleh:

$$\begin{aligned} \mu(ab) &\geq \min\{\mu(a), \mu(b)\}, \\ \mu(b) &\geq \min\{0,8; 0,5\}, \\ 0,5 &\geq 0,5. \\ \mu(a^{-1}) &\geq \mu(a), \\ \mu(a) &\geq \mu(a), \\ 0,8 &\geq 0,8. \\ \mu(bc) &\geq \min\{\mu(b), \mu(c)\}, \\ \mu(d) &\geq \min\{0,5; 0,7\}, \\ 0,5 &\geq 0,5. \\ \mu(b^{-1}) &\geq \mu(b), \\ \mu(d) &\geq \mu(b), \\ 0,5 &\geq 0,5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(cd) &\geq \min\{\mu(c), \mu(d)\},\\
\mu(b) &\geq \min\{0,7; 0,5\},\\
0,5 &\geq 0,5.\\
\mu(c^{-1}) &\geq \mu(c),\\
\mu(c) &\geq \mu(c),\\
0,7 &\geq 0,7.\\
\mu(da) &\geq \min\{\mu(d), \mu(a)\},\\
\mu(d) &\geq \min\{0,5; 0,8\},\\
0,5 &\geq 0,5.\\
\mu(d^{-1}) &\geq \mu(d),\\
\mu(b) &\geq \mu(d),\\
0,5 &\geq 0,5.
\end{aligned}$$

Begitu seterusnya, sehingga dapat dikatakan bahwa subhimpunan *fuzzy* μ adalah subgrup *fuzzy* dari G, dengan $G \times G \in G$.

Definisi 2.5. [1] *Misalkan μ subhimpunan fuzzy dari X. Himpunan $\mu_t = \{x \in X | \mu(x) \geq t\}$ untuk $t \in [0,1]$, adalah tingkatan subhimpunan dari subhimpunan fuzzy μ.*

Contoh 2.6. Diketahui himpunan $G = \{a, b, c, d, e\}$ adalah sebuah grup. Misalkan $\mu : G \to [0,1]$ sedemikian sehingga $\mu(a) = 1$; $\mu(b) = 0,5$; $\mu(c) = 0,7$; $\mu(d) = 0,5$; dan $\mu(e) = 0,8$ adalah subhimpunan *fuzzy* dari G. Akan ditentukan tingkatan subhimpunan dari subhimpunan *fuzzy* μ dengan $t = 0,5$. Misalkan himpunan μ_t adalah tingkatan subhimpunan dari subhimpunan *fuzzy* μ. Karena $t = 0,5$ maka $\mu(a) \geq t$, $\mu(b) \geq t$, $\mu(c) \geq t$, $\mu(d) \geq t$, dan $\mu(e) \geq t$. Sehingga $\mu_t = \{a, b, c, d, e\}$.

Teorema 2.7. [1] *Misalkan G adalah grup dan μ adalah subgrup fuzzy dari G, maka tingkatan subhimpunan μ_t untuk $t \in [0,1]$, $t \leq \mu(e)$, adalah subgrup dari G, dengan e adalah identitas di G.*

Bukti. Akan dibuktikan μ_t adalah subgrup dari G, yaitu:

(1) $\mu_t \subset G$ dan $\mu_t \neq \emptyset$.
(2) $\forall x, y \in \mu_t$, berlaku $xy \in \mu_t$.
(3) $\forall x \in \mu_t$, berlaku $x^{-1} \in \mu_t$.

Misalkan G grup dan μ subgrup *fuzzy* dari G, sehingga: $\mu_t = \{x \in G | \mu(x) \geq t\}$ dengan $t \in [0,1]$, dan $\mu(e) \geq t$.

(1) Akan dibuktikan $\mu_t \subset G$ (yaitu $x \in \mu_t \Rightarrow x \in G$) dan $\mu_t \neq \emptyset$.
Misalkan $x \in \mu_t$, maka $\mu(x) \geq t$ dan $x \in G$. Maka jelas terbukti bahwa $x \in G$. Lalu karena G grup, maka terdapat $e \in G$, dan diketahui juga bahwa $\mu(e) \geq t$, sehingga terdapat $e \in \mu_t$. Maka terbukti bahwa $\mu_t \neq \emptyset$.

(2) Akan dibuktikan jika $\forall\ x, y \in \mu_t$ maka $xy \in \mu_t$.
Misalkan $x, y \in \mu_t$, maka $\mu(x) \geq t$ dan $x \in X$, dan $\mu(y) \geq t$ dan $y \in X$. Karena μ subgrup *fuzzy* dari G, maka berlaku

$$\begin{aligned} \mu(xy) &\geq \min\{\mu(x), \mu(y)\} \\ &\geq \min\{t, t\} \\ &\geq t. \end{aligned}$$

Karena $\mu(xy) \geq t$, sehingga terbukti bahwa $xy \in \mu_t$.

(3) Akan dibuktikan jika $\forall\ x \in \mu_t$ maka $x^{-1} \in \mu_t$.
Misal $x \in \mu_t$, maka $\mu(x) \geq t$ dan $x \in G$. Diketahui $\mu\ (x^{-1}) \geq \mu(x)$. Namun $\mu(x) \geq t$, sehingga diperoleh $\mu\ (x^{-1}) \geq t$.
Karena $\mu\ (x^{-1}) \geq t$, maka terbukti bahwa $x^{-1} \in \mu_t$. □

Teorema 2.8. [*1*] *Misalkan G adalah grup dan μ adalah subhimpunan fuzzy dari G. Jika μ_t adalah subgrup dari G, dan untuk setiap $t \in$ [0,1], maka μ adalah subgrup fuzzy dari G.*

Bukti. Akan dibuktikan bahwa μ adalah subgrup *fuzzy* dari G, yaitu untuk setiap $x, y \in G$ berlaku:

(1) $\mu\ (xy) \geq min\ \{\mu(x),\ \mu(y)\}$
(2) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$.

Diketahui $x, y \in G$ dan μ_t subgrup dari G.

(1) Akan dibuktikan $\mu(xy) \geq \min\ \{\mu(x),\ \mu(y)\}$.
Misalkan $\mu(x) = t_1$, berarti $x \in \mu_{t_1}$, dan $\mu(y) = t_2$, berarti $y \in \mu_{t_2}$. Misal diasumsikan $t_1 < t_2$, sehingga diperoleh $\mu_{t_2} \subset \mu_{t_1}$. Karena $y \in \mu_{t_2}$ dan $\mu_{t_2} \subset \mu_{t_1}$, maka $y \in \mu_{t_1}$. Diketahui $x, y \in \mu_{t_1}$ dan μ_{t_1} subgrup dari G, maka berlaku $xy \in \mu_{t_1}$. Dengan demikian diperoleh:

$$\begin{aligned} xy \in \mu_{t_1} \Rightarrow \mu(xy) &\geq t_1 \\ \mu(xy) &\geq \min\{t_1, t_2\} \text{ karena } t_1 < t_2 \\ \mu(xy) &\geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}. \end{aligned}$$

(2) Akan dibuktikan $\mu(x^{-1}) \geq \mu\ (x)$.
Misalkan $\mu(x) = t_1$ berarti $x \in \mu_{t_1}$. Karena μ_{t_1}subgrup dari G, maka terdapat $x^{-1} \in \mu_{t_1}$, sehingga $x^{-1} \in \mu_t \Rightarrow x^{-1} \in X$ dan $\mu\ (x^{-1}) \geq t$. Jadi diperoleh μ $(x^{-1}) \geq t = \mu\ (x)$. Terbukti bahwa $\mu\ (x^{-1}) \geq \mu\ (x)$. □

Catatan 2.9. Misalkan G adalah grup dan μ adalah subhimpunan *fuzzy* dari G. Dan misalkan μ_t adalah tingkatan subhimpunan dari subhimpunan *fuzzy* μ untuk setiap $t \in [0, 1]$ dengan $t \leq \mu(e)$. μ_t adalah subgrup dari G jika dan hanya jika μ adalah subgrup *fuzzy* dari G.

3. Tingkatan Subgrup dari Subhimpunan *Fuzzy*

Definisi 3.1. [1] *Misalkan G adalah grup dan μ adalah subgrup fuzzy dari G. Subgrup μ_t dengan $t \in [0,1]$ dan $t \leq \mu(e)$ dengan e adalah unsur identitas di G, disebut tingkatan subgrup dari μ.*

Teorema 3.2. [1] *Misalkan G grup dan μ subgrup fuzzy dari G. Dua tingkatan subgrup μ_{t_1}, μ_{t_2} dengan $t_1 < t_2$ adalah sama jika dan hanya jika tidak ada x di G sedemikian sehingga $t_1 < \mu(x) < t_2$.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan G grup dan μ subgrup *fuzzy* dari G. Dan misal $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ dengan $t_1 < t_2$. Maka akan dibuktikan tidak ada x di G, sedemikian sehingga $t_1 < \mu\ (x) < t_2$.
Misalkan G grup dan terdapat x di G sedemikian sehingga $t_1 < \mu\ (x) < t_2$. Dan diketahui bahwa $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$, yaitu $\mu_{t_1} \subset \mu_{t_2}$ dan $\mu_{t_2} \subset \mu_{t_1}$.
Karena $t_1 < \mu(x) < t_2$, sehingga terdapat $x \in \mu_{t_1}$ yang tidak di μ_{t_2}. Dengan kata lain μ_{t_2} bukan subhimpunan dari μ_{t_1}. Kontradiksi dengan pernyataan bahwa $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$. Sehingga haruslah tidak terdapat x di G sedemikian sehingga $t_1 < \mu\ (x) < t_2$. Maka terbukti bahwa tidak ada x di G sedemikian sehingga $t_1 < \mu\ (x) < t_2$.
($\Leftarrow$) Misalkan G grup dan μ subgrup *fuzzy* dari G. Dan misal tidak ada x di G, sedemikian sehingga $t_1 < \mu(x) < t_2$. Maka akan dibuktikan $\mu_{t_1} = \mu_{t_2}$ dengan $t_1 < t_2$, yaitu $\mu_{t_1} \subset \mu_{t_2}$ dan $\mu_{t_2} \subset \mu_{t_1}$.

(1) Akan dibuktikan $\mu_{t_1} \subset \mu_{t_2}$.
Misalkan $x \in \mu_{t_1}$, berarti $\mu\ (x) \geq t_1$ dan $x \in G$. Karena $x \in G$ akibatnya $t_1 \geq \mu\ (x)$ atau $\mu\ (x) \geq t_2$. Diketahui $\mu\ (x) \geq t_1$ sehingga berlaku $\mu\ (x) \geq t_2$. Dengan kata lain $x \in \mu_{t_2}$. Jadi $\forall x \in \mu_{t_1}$ diperoleh $x \in \mu_{t_2}$, maka terbukti bahwa $\mu_{t_1} \subset \mu_{t_2}$.
(2) Akan dibuktikan $\mu_{t_2} \subset \mu_{t_1}$.
Misalkan $y \in \mu_{t_2}$, berarti $\mu\ (y) \geq t_2$ dan $y \in G$. Karena $t_1 < t_2$ dan $\mu\ (y) \geq t_2$, jelaslah bahwa $\mu(y) \geq t_1$, sehingga $y \in \mu_{t_1}$. Jadi $\forall y \in \mu_{t_2}$ diperoleh $y \in \mu_{t_1}$, maka terbukti bahwa $\mu_{t_2} \subset \mu_{t_1}$. □

Akibat 3.3. [1] *Misalkan G grup hingga dengan orde n dan μ subgrup fuzzy dari G. Misal $Im(\mu) = \{t_i | \mu(x) = t_i,\ untuk\ suatu\ xdiG\}$ maka tingkatan subgrup dari μ hanya μ_{t_i}.*

Bukti. Misalkan G grup hingga dan μ subgrup *fuzzy* dari G. Maka tingkatan subhimpunan μ_t untuk $t \in [0,1]$, $t \leq \mu(e)$, adalah subgrup dari G, dengan e adalah identitas di G. Asumsikan $\mu(e) = t$ maka $\mu_t = \{e\}$.
Diketahui $t \in$ [0,1], dan misal $t \in Im\ (\mu)$ maka $\mu\ (x) = t$, untuk suatu x tidak di G. Jika $t_i < t < t_j$ atau $t_i < \mu(x) < t_j$ (karena $\mu(x) = t$) dengan $t_i, t_j \in Im(\mu)$, sehingga berlaku $\mu_{t_i} = \mu_{t_j} = \mu_t$. Misalkan t_r adalah unsur terkecil di $Im\ (\mu)$ dan $t < t_r$, diperoleh $\mu_{t_r} = \mu_t$. Maka terbukti bahwa untuk sebarang $t \in$ [0,1] tingkatan subgrup hanya μ_{t_i}, untuk suatu $t_i \in Im\ (\mu)$. □

Teorema 3.4. [*1*] *Sebarang subgrup H dari grup G dapat dinyatakan sebagai suatu tingkatan subgrup dari suatu subgrup fuzzy dari G.*

Bukti. Diketahui H subgrup dari grup G dan μ subgrup *fuzzy* dari G. Misal μ_t tingkatan subgrup dari μ, maka akan ditunjukkan $H = \mu_t$ untuk suatu $t \in [0,1]$. Misalkan μ subhimpunan *fuzzy* dari G, maka:

$$\mu(x) = \begin{cases} t, & x \in H, \\ 0, & x \notin H, \end{cases}$$

untuk $0 < t < 1$.

Misalkan μ subgrup *fuzzy* dari G, maka:

(1) $\mu(xy) \geq min\ \{\mu(x), \mu(y)\}$
(2) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

untuk setiap $x, y \in G$. Karena x, $y \in G$ dan $H \subset G$ maka ada tiga kasus, yaitu:

(Kasus 1) $x \in H$, $y \in H$.
Akan dibuktikan bahwa μ adalah subgrup *fuzzy* dari G. Misalkan x, $y \in H$ dan H subgrup dari G, maka berlaku $xy \in H$ dan $(x^{-1}) \in H$. Dari definisi subhimpunan *fuzzy* diperoleh

$$\mu(xy) = t, \mu(x) = t, \mu(x^{-1}) = t, \text{ dan } \mu(y) = t,$$

sehingga

$$\begin{aligned} \mu(xy) &\geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \\ t &\geq \min\{t, t\}, \\ t &\geq t. \\ \mu(x^{-1}) &\geq \mu(x), \\ t &\geq t. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa μ adalah subgrup *fuzzy* dari G.

(Kasus 2) $x \in H$, $y \notin H$.
Akan dibuktikan bahwa μ adalah subgrup *fuzzy* dari G. Misalkan $x \in H$, $y \notin H$ dan H subgrup dari G, maka berlaku $xy \notin H$ dan $(x^{-1}) \in H$. Dari definisi subhimpunan *fuzzy* diperoleh

$$\mu(xy) = 0, \mu(x) = t, \mu(x^{-1}) = t, \text{ dan } \mu(y) = 0,$$

sehingga

$$\begin{aligned} \mu(xy) &\geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \\ 0 &\geq \min\{t, 0\}, \\ 0 &\geq 0, \\ \mu(x^{-1}) &\geq \mu(x), \\ t &\geq t. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa μ adalah subgrup *fuzzy* dari G.

(Kasus 3) $x \notin H$, $y \notin H$.

Akan dibuktikan bahwa μ adalah subgrup *fuzzy* dari G. Misalkan x, $y \notin H$ dan H subgrup dari G, maka berlaku $xy \notin H$ atau $xy \in H$, dan $(x^{-1}) \notin H$. Dari definisi subhimpunan *fuzzy* diperoleh:

$$\mu(xy) = \begin{cases} t, \ xy \in H, \\ 0, \ xy \notin H. \end{cases}$$

Karena $\mu(x) = 0$, $\mu(x^{-1}) = 0$, dan $\mu(y) = 0$, maka

$$\begin{aligned} \mu(xy) &\geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \\ 0 &\geq \min\{0, 0\}, \\ 0 &\geq 0, \text{ atau} \\ \mu(xy) &\geq \min\{\mu(x), \mu(y)\}, \\ t &\geq \min\{0, 0\}, \\ t &\geq 0. \\ \mu(x^{-1}) &\geq \mu(x), \\ t &\geq t. \end{aligned}$$

Dapat dilihat bahwa μ adalah subgrup *fuzzy* dari G.

Dari Kasus 1, Kasus 2 dan Kasus 3 telah ditunjukkan bahwa μ adalah subgrup *fuzzy* dari G. Jadi untuk subgrup *fuzzy* ini, $\mu_t = H$. □

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah dikaji kembali jurnal [1] mengenai Subgrup *Fuzzy* dan Tingkatan Subgrup dari Subhimpunan *Fuzzy*. Misalkan G grup dan μ subgrup *fuzzy* dari G. Dua tingkatan subgrup μ_{t_1}, μ_{t_2} dengan $t_1 < t_2$ adalah sama jika dan hanya jika tidak ada x di G sedemikian sehingga $t_1 < \mu\ (x) < t_2$. Lalu misalkan G grup hingga dengan orde n dan μ subgrup *fuzzy* dari G. Misal $Im(\mu) = \{t_i | \mu(x) = t_i$, untuk suatu x di G $\}$ maka tingkatan subgrup dari μ hanya μ_{t_i}. Terahir, sebarang subgrup H dari grup G dapat dinyatakan sebagai suatu tingkatan subgrup dari suatu subgrup *fuzzy* dari G. .

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Nova Noliza Bakar M.Si, Ibu Dr Yanita, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Zulakmal M.Si, dan Ibu Radhiatul Husna M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Das, P.S. 1981. Fuzzy Groups and Level Subgroups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **84**: 264 – 269

[2] Herstein, I.N. 1964. *Topics in Algebra*. Second Edition. University of Chicago, Singapore

[3] Onasanya, B.O. and S.A. Ilori. 2013. On Fuzzy Subgroup and Fuzzy Cosets. *International Jurnal of Computer Applications* **81**(14): 8875 – 8887

[4] Rosenfeld, A. 1971. Fuzzy Groups. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **35**: 512 – 517

[5] Setiadji. 2009. *Himpunan dan Logika Samar serta Aplikasinya*. Edisi Pertama. Graha Ilmu, Yogyakarta.

[6] Xuehai, Y. and Lee, E.S. 2003. Fuzzy Group Based on Fuzzy Binary Operation. *Computer and Mathematics with Applications* **47**: 631 – 641

[7] Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy Sets. *Information and Control.* **8** : 338 – 353