Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **1** Hal. 90 – 95
ISSN : 2303–291X

DIMENSI METRIK DARI $(K_n \times P_m) \odot K_1$

NOFITRI RAHMI M, ZULAKMAL
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : nofitri.rahmi.nr@gmail.com

Abstrak. Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$ dan $W \subseteq V(G)$, dimana $|W| = K$, dan $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$. Representasi metrik dari titik $v \in V$ terhadap W adalah $r(v \mid W) = (d(v, v_1), d(v, v_2), \cdots, d(v, v_k))$. Himpunan W dikatakan sebagai *resolving set* di G jika untuk setiap pasangan dari titik-titik berbeda $u, v \in V$, $r(u \mid W) \neq r(v \mid W)$. Dimensi metrik dari G adalah kardinalitas minimum dari *resolving set* untuk G dan dinotasikan $dim(G)$. Graf $(K_n \times P_m)$ adalah graf hasil kali Kartesius antara graf lengkap (K_n) dengan n titik dan graf lintasan (P_m) dengan m titik. Graf $(K_n \times P_m) \odot K_1$ adalah graf yang diperoleh dari graf $(K_n \times P_m)$ dengan nm titik dan graf lengkap K_1 dengan cara menghubungkan titik v_{ij} di $(K_n \times P_m)$ ke titik u_{ij}, yang merupakan salinan ke-ij dari graf K_1, untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$. Pada paper ini dikaji kembali makalah [4] yang membahas tentang penentuan $dim((K_n \times P_m) \odot K_1$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.

Kata Kunci: Dimensi metrik, *resolving set*, hasil kali kartesius, graf korona

1. Pendahuluan

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf sederhana dan $u, v \in V$ adalah dua titik berbeda dari graf G, jarak $d(u, v)$ antara dua titik u dan v adalah panjang dari lintasan terpendek antara u dan v. Himpunan titik-titik $W = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ dari graf G. Representasi metrik dari titik $v \in V$ terhadap W adalah

$$r(v \mid W) = (d(v, v_1), d(v, v_2), \cdots, d(v, v_k)).$$

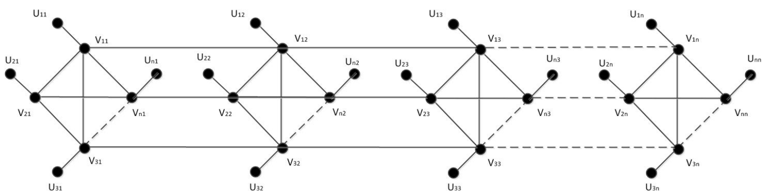
Himpunan W dikatakan sebagai himpunan pembeda (*resolving set*) di G jika untuk setiap pasangan dari titik-titik berbeda $u, v \in V$, $r(u \mid W) \neq r(v \mid W)$. Himpunan pembeda (*resolving set*) dengan kardinalitas minimum untuk graf G disebut dengan himpunan pembeda (*resolving set*) minimum atau basis dari G. Dimensi metrik dari G adalah kardinalitas minimum dari himpunan pembeda (*resolving set*) untuk G dan dinotasikan $dim(G)$. Kardinalitas merupakan banyaknya anggota dari suatu himpunan.

Misalkan terdapat graf G dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan graf H dengan himpunan titik $V(H) = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$. Hasil kali Kartesius (*Cartesian Product*) dari graf G dan H adalah $G \times H$, yang dibentuk oleh titik-titik $V = \{w_{ij} \mid w_{ij} = (v_i, u_j) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ dan dua titik (v_i, u_j) dan (v_k, u_l) bertetangga di $G \times H$ jika dan hanya jika ($v_i = v_k$ dan u_j bertetangga u_l) atau (v_i bertetangga v_k dan $u_j = u_l$).

Salinan adalah graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi yang sama dari graf G. Misal terdapat graf G dengan n titik. Graf G korona H, dinotasikan $G \odot H$ didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dengan mengambil satu salinan graf G dan n salinan $H_1, H_2, \cdots, H_n$ dari graf H, kemudian menghubungkan titik ke-i dari G ke setiap titik di H_i, untuk $1 \leq i \leq n$.

2. Dimensi Metrik Dari $(K_n \times P_m) \odot K_1$

Misalkan terdapat graf K_n dengan himpunan titik $V(K_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ dan graf P_m dengan himpunan titik $V(P_m) = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ dan graf K_1 dengan $V(K_1) = \{x_1\}$. Graf $(K_n \times P_m)$ adalah graf hasil kali Kartesius antara graf K_n dan graf P_m. Graf $(K_n \times P_m) \odot K_1$ adalah graf yang diperoleh dari graf $(K_n \times P_m)$ dengan nm titik dan graf lengkap K_1 dengan cara menghubungkan titik v_{ij} di $(P_n \times P_m)$ ke titik u_{ij}, yang merupakan salinan ke-ij dari graf K_1, untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$.



Gambar 1. Graf $(K_n \times P_m) \odot K_1$

Teorema 2.1. [4] *Jika* $m \geq 2$, *maka*

$$\dim((K_n \times P_m) \odot K_1) = \begin{cases} n-1, & \textit{untuk}\, n \geq 4; \\ 3, & \textit{untuk}\, n = 3. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $V(K_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah himpunan titik dari graf K_n dan $V(P_m) = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ adalah himpunan titik dari graf P_m. Definisikan $V(K_n \times P_m) = \{v_{ij} \mid v_{ij} = (v_i, u_j)\}$ dan titik pendant dari v_{ij} pada $(K_n \times P_m) \odot K_1$ dinotasikan sebagai u_{ij}. Karena $(K_n \times P_m) \odot K_1$ bukan lintasan, maka $\dim((K_n \times P_m) \odot K_1) \geq 2$.

Akan ditunjukkan $\dim((K_n \times P_m) \odot K_1) \geq 3$, yaitu dengan menunjukkan bahwa jika himpunan pembeda terdiri dari dua anggota, akan diperoleh dua titik pada graf tersebut dengan representasi yang sama.

Pilih $S' = \{a, b\}$ adalah himpunan pembeda untuk $(K_n \times P_m) \odot K_1$. Jika terdapat dua lintasan berbeda dengan panjang $d(a, b)$ antara a dan b, maka terdapat dua titik-titik berbeda c, e dari $(K_n \times P_m) \odot K_1$ sedemikian sehingga $d(c, a) = d(e, a)$ dan $d(c, b) = d(e, b)$. Maka $r(c \mid S') = r(e \mid S')$, kontradiksi.

Misalkan hanya ada satu lintasan Q, dengan panjang $d(a, b)$, antara a dan b, maka terdapat titik v berderajat 4 yang berada dalam lintasan Q. Sehingga, v memiliki dua tetangga c, e bukan termasuk lintasan Q, sedemikian sehingga

$d(c, a) = 1 + d(e, a)$ dan $d(c, b) = 1 + d(v, b) = d(e, b)$. Maka $r(c \mid S') = r(e \mid S')$, kontradiksi. Karena itu, $\dim((K_3 \times P_m) \odot K_1) \geq 3$.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa $\dim((K_3 \times P_m) \odot K_1) \leq 3$. Pilih $S = \{v_{11}, v_{21}, v_{3m}\}$ sebagai himpunan pembeda untuk $(K_3 \times P_m) \odot K_1$. Maka representasi dari titik-titik $(K_3 \times P_m) \odot K_1$ terhadap S adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r(v_{ij} \mid S) &= (d(v_{ij}, v_{11}), d(v_{ij}, v_{21}), d(v_{ij}, v_{3m})),\\
&= (j + i - 2, j + i - 3, m + i - j - 3),\\
r(u_{ij} \mid S) &= (d(u_{ij}, v_{11}), d(u_{ij}, v_{21}), d(u_{ij}, v_{3m})),\\
&= (j + i - 1, j + i - 2, m + i - j - 2),\\
r(v_{kl} \mid S) &= (d(v_{kl}, v_{11}), d(v_{kl}, v_{21}), d(v_{kl}, v_{3m})),\\
&= (l + k - 2, l + k - 3, m + k - l - 3),\\
r(u_{kl} \mid S) &= (d(u_{kl}, v_{11}), d(u_{kl}, v_{21}), d(u_{kl}, v_{3m}))\\
&= (l + k - 1, l + k - 2, k + m - l - 2).
\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa representasi setiap titik di $(K_3 \times P_m) \odot K_1$ terhadap S berbeda. Representasi setiap titik di $(K_3 \times P_m) \odot K_1$ dijabarkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r(v_{11} \mid S) &= (d(v_{11}, v_{11}), d(v_{11}, v_{21}), d(v_{11}, v_{3m})) = (0, 1, m),\\
r(v_{12} \mid S) &= (d(v_{12}, v_{11}), d(v_{12}, v_{21}), d(v_{12}, v_{3m})) = (1, 2, m - 1),\\
&\vdots\\
r(v_{1m} \mid S) &= (d(v_{1m}, v_{11}), d(v_{1m}, v_{21}), d(v_{1m}, v_{3m})) = (m - 1, m, 1),\\
&\vdots\\
r(v_{3m} \mid S) &= (d(v_{3m}, v_{11}), d(v_{3m}, v_{21}), d(v_{3m}, v_{3m})) = (m, m, 0),\\
r(u_{11} \mid S) &= (d(u_{11}, v_{11}), d(u_{11}, v_{21}), d(u_{11}, v_{3m})) = (1, 2, m + 1),\\
r(u_{12} \mid S) &= (d(u_{12}, v_{11}), d(u_{12}, v_{21}), d(u_{12}, v_{3m})) = (2, 1, m),\\
&\vdots\\
r(u_{1m} \mid S) &= (d(u_{1m}, v_{11}), d(u_{1m}, v_{21}), d(u_{1m}, v_{3m})) = (m, m + 1, 2),\\
&\vdots\\
r(u_{3m} \mid S) &= (d(u_{3m}, v_{11}), d(u_{3m}, v_{21}), d(u_{3m}, v_{3m})) = (m + 1, m + 1, 1).
\end{aligned}$$

Andaikan terdapat dua titik berbeda x, y dari $(K_3 \times P_m) \odot K_1$ sedemikian sehingga $r(x \mid S) \neq r(y \mid S)$. Pandang kasus berikut.
Kasus 1: $x = v_{ij}$ dan $y = v_{kl}$.
Jika $j = l$ dan $i \neq k$ sehingga untuk $v_{i1} \in S$ diperoleh $d(x, v_{i1}) = j - 1 < j = d(y, v_{i1})$. Jika $j = l$ dan $i = k = 3$ diperoleh $d(x, v_{3m}) = m - j = m - l = d(y, v_{3m})$. Jika $j < l$ dan $i \neq k$ sehingga untuk $v_{i1} \in S$ diperoleh $d(x, v_{i1}) = j - 1 < l - 1 \leq d(y, v_{i1})$. Jika $j < l$ dan $i = k = 3$ diperoleh $d(x, v_{3m}) = m - j > m - l = d(y, v_{3m})$. Untuk $j > l$, pembuktian dilakukan dengan cara yang sama seperti kasus $j < l$.
Kasus 2: $x = u_{ij}$ dan $y = u_{kl}$.
Pembuktian dilakukan dengan cara analog seperti Kasus 1.

Kasus 3: $x = v_{ij}$ dan $y = u_{kl}$.
Jika $j = l$ dan $i \neq k$ sehingga untuk $v_{i1} \in S$ diperoleh $d(x, v_{i1}) = j - 1 < j \leq d(y, v_{i1})$. Jika $j = l$ dan $i = k = 3$ diperoleh $d(x, v_{3m}) = m - j < m - j + 1 = d(y, v_{3m})$.

Untuk kasus $j \neq l$ pandang subkasus berikut.

Subkasus 3.1 Jika $j \neq l$,$i = k$ dan $j = l + 1$.
Diperoleh $d(x, v_{3m}) = m - j + 1 = m - l < m - l + 2 = d(y, v_{3m})$. Jika $j \neq l$, $i = k$ dan $j \neq l + 1$ diperoleh $d(x, v_{i1}) = j - 1 \neq l + 1 = d(y, v_{i1})$.

Subkasus 3.2 Jika $j \neq l$, $i = k$ dan $j = l - 1$.
Diperoleh $d(x, v_{r1}) = j = l - 1 < l + 1 = d(y, v_{r1})$. Jika $j \neq l$, $i = k$ dan $j \neq l - 1$ diperoleh $d(x, v_{3m}) = m - j \neq m - l + 1 = d(y, v_{3m})$. Jika $j \neq l$ dan $i \neq 3$, diperoleh $d(x, v_{r1}) = j > j - 1 \geq d(y, v_{r1})$.

Dengan demikian, untuk setiap titik-titik berbeda x, y dari $(K_3 \times P_m) \odot K_1$, $r(x \mid S) \neq r(y \mid S)$. Oleh karena itu, $\dim((K_3 \times P_m) \odot K_1) \leq 3$. Sehingga diperoleh $dim((K_3 \times P_m) \odot K_1) = 3$.

Selanjutnya, untuk $n \geq 4$ akan ditunjukkan bahwa $\dim((K_n \times P_m) \odot K_1) = n-1$. Pilih $S = \{v_{1m}, v_{31}, v_{41}, \cdots, v_{n1}\}$ sebagai himpunan pembeda untuk $(K_n \times P_m) \odot K_1$. Maka representasi dari titik-titik di $(K_n \times P_m) \odot K_1$ terhadap S sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r(v_{ij} \mid S) &= (d(v_{ij}, v_{1m}), d(v_{ij}, v_{21}), d(v_{ij}, v_{41}), \cdots, d(v_{ij}, v_{n1})), \\
&= (m + i - j - 1, i + j - 4, i + j - 5, \cdots, i + j - n - 1), \\
r(u_{ij} \mid S) &= (d(u_{ij}, v_{1m}), d(u_{ij}, v_{21}), d(u_{ij}, v_{41}), \cdots, d(u_{ij}, v_{n1})), \\
&= (m + i - j, i + j - 3, i + j - 4, \cdots, j + i - 1), \\
r(v_{kl} \mid S) &= (d(v_{kl}, v_{1m}), d(v_{kl}, v_{21}), d(v_{kl}, v_{41}), \cdots, d(v_{kl}, v_{n1})), \\
&= (k + l - m - 1, l + k - 4, l + k - 5, \cdots, k + l - n - 1), \\
r(u_{kl} \mid S) &= (d(u_{kl}, v_{1m}), d(u_{kl}, v_{21}), d(u_{kl}, v_{41}), \cdots, d(u_{kl}, v_{n1})), \\
&= (m + k - l, k + l - 3, k + l - 4, \cdots, j + i - 1).
\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa representasi setiap titik di $(K_n \times P_m) \odot K_1$ adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
r(v_{11} \mid S) &= (d(v_{11}, v_{1m}), d(v_{11}, v_{31}), d(v_{11}, v_{41}), \cdots, d(v_{11}, v_{n1}) = (m - 1, 1, 1, \cdots, 1), \\
r(v_{12} \mid S) &= (d(v_{12}, v_{1m}), d(v_{12}, v_{31}), d(v_{12}, v_{41}), \cdots, d(v_1), v_{n1}) = (m - 2, 2, 2, \cdots, 2), \\
&\vdots \\
r(v_{1m} \mid S) &= (d(v_{1m}, v_{1m}), d(v_{1m}, v_{31}), d(v_{1m}, v_{41}), \cdots, d(v_{1m}, v_{n1}) = (0, m, m, \cdots, m), \\
&\vdots \\
r(v_{nm} \mid S) &= (d(v_{nm}, v_{1m}), d(v_{nm}, v_{31}), d(v_{nm}, v_{41}), \cdots, d(v_{nm}, v_{n1}) = (1, n + m - 4, \\
&\quad n + m - 5, \cdots, m - 1). \\
r(u_{11} \mid S) &= (d(u_{11}, v_{1m}), d(u_{11}, v_{31}), d(u_{11}, v_{41}), \cdots, d(u_{11}, v_{n1}) = (m, 2, 2, \cdots 2), \\
r(u_{12} \mid S) &= (d(u_{12}, v_{1m}), d(u_{12}, v_{31}), d(u_{12}, v_{41}), \cdots, d(u_{12}, v_{n1}) = (m - 1, 3, 3, \cdots 3), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(u_{1m} \mid S) &= (d(u_{1m}, v_{1m}), d(u_{1m}, v_{31}), d(u_{1m}, v_{41}), \cdots, d(u_{1m}, v_{n1}) = (1, m+1, m+1, \\ &\quad \cdots, n+1), \\ &\vdots \\ r(u_{nm} \mid S) &= (d(u_{nm}, v_{1m}), d(u_{nm}, v_{31}), d(u_{nm}, v_{41}), \cdots, d(u_{nm}, v_{n1}) = (2, m+n-3, \\ &\quad \cdots, m+n-4). \end{aligned}$$

Andaikan terdapat dua titik berbeda x, y dari $(K_n \times P_m) \odot K_1$ sedemikian sehingga $r(x \mid S) \neq r(y \mid S)$. Pandang kasus berikut.
Kasus 1. $x = v_{ij}$ dan $y = v_{kl}$.
Jika $j = l$, maka $i \neq k$. Anggap $i = 1$ dan $k = 2$. Sehingga untuk $v_{1m} \in S$, diperoleh $d(x, v_{1m}) = m - j < m - j + 1 = d(y, v_{1m})$. Jika $i \notin \{1, 2\}$ atau $k \notin \{1, 2\}$ diperoleh $d(x, v_{i1}) = j - 1 < j = l = d(y, v_{i1})$. Jika $j \neq l$, pilih $j < l$, maka terdapat $v_{t1} \in S, t \in 3, \cdots, n$, $t \neq k$, akibatnya

$$\begin{aligned} d(x, v_{t1}) &= d(x, v_{i1}) + d(v_{i1}, v_{t1}), \\ &\leq j - 1 + d(v_{k1}, v_{t1}), \\ &< l - 1 + d(v_{k1}, v_{t1}), \\ &= d(y, v_{k1}) + d(v_{k1}, v_{t1}), \\ &= d(y, v_{t1}). \end{aligned}$$

Kasus 2: $x = u_{ij}$ dan $y = u_{kl}$.
Karena $d(u_{ij}, v) = d(v_{ij}, v) + 1$ untuk setiap $v \in S$, pembuktian dilakukan dengan cara analog seperti kasus diatas dan diperoleh $r(u_{ij} \mid S) \neq r(u_{kl} \mid S)$.
Kasus 3: $x = v_{ij}$ dan $y = u_{kl}$.
Jika $j \leq l$, maka untuk setiap $v_{t1} \in S$ diperoleh

$$\begin{aligned} d(x, v_{t1}) &= d(x, v_{i1}) + d(v_{i1}, v_{t1}), \\ &= j - 1 + d(v_{i1}, v_{t1}), \\ &< l - 1 + d(v_{i1}, v_{t1}), \\ &\leqslant l + d(v_{k1}, v_{t1}), \\ &= d(y, v_{k1}) + d(v_{k1}, v_{t1}), \\ &= d(y, v_{t1}). \end{aligned}$$

Jika $j > l$, maka

$$\begin{aligned} d(x, v_{1m}) &= d(x, v_{im}) + d(v_{im}, v_{1m}), \\ &= m - j + d(v_{im}, v_{1m}), \\ &< m - l + d(v_{im}, v_{1m}), \\ &\leqslant m - l + 1 + d(v_{km}, v_{1m}), \\ &= d(y, v_{km}) + d(v_{km}, v_{1m}), \\ &= d(y, v_{1m}). \end{aligned}$$

Dengan demikian, untuk setiap titik-titik berbeda x, y dari $(K_n \times P_m) \odot K_1$, $r(x \mid S) \neq r(y \mid S)$. Oleh karena itu, $\dim((K_n \times P_m) \odot K_1) = n - 1$. $\square$

3. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah dikaji kembali makalah [4] mengenai dimensi metrik dari graf $(K_n \times P_m) \odot K_1$ untuk $n \geq 3$ dan $m \geq 2$, dimana diperoleh bahwa jika $m \geq 2$, maka;

$$\dim((K_n \times P_m) \odot K_1 = \begin{cases} n-1, & \text{untuk } n \geq 4; \\ 3, & \text{untuk } n = 3. \end{cases}$$

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory.* New York. Springer.

[2] Caceres, J., Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I.M., Puertas, M.L., dan Seara, C. 2005. On the metric dimension of some families of graphs. *SIAM Journal of Discrete Mathematics.* **22**: 129 – 133

[3] Chartrand, G., Eroh, L., Jhonson, M., dan Oellerman, O.R. 2000. Resolvability in graph and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics* **105**: 99 – 107

[4] D. Kuziak, J.A. Rodriguez-Velazquez dan I.G. Yero. Correction to the article "The metric dimension of graph with pendant edges". [Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, **65** (2008) 139 – 145]. *arXiv:1010.1784v1 [math.CO] 8 Oktober 2010.*

[5] H. Iswadi, E.T. Baskoro, R. Simanjuntak, A.N.M. Salman. 2008. The metric dimension of graph with pendant edges. *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing* **65** : 139 – 145.

[6] F. Harary, R.A. Melter. 1976. On the metric dimension of a graph. *Ars Combinatoria* **2** : 191 – 195

[7] M. Bahri, Nurdin, M.Zakir, G. Mahie dan Darmo. 2013. The metric dimension of cross product of path graphs $P_m \times P_2 \times P_2$, $m \geq 2$. *Manasir* **1** : 15 – 18