OBSERVER UNTUK SISTEM KONTROL LINIER KONTINU

SUKMA HAYATI, ZULAKMAL

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 email : nyuma_kamiya@yahoo.com*

Abstrak. Dalam makalah ini dikaji syarat agar diperoleh persamaan observer untuk suatu sistem kontrol linier kontinu. Estimasi yang baik memenuhi $\bar{\mathbf{e}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ bila $t \rightarrow \infty$, atau stabil asimtotik. Kestabilan asimtotik sistem $\dot{\bar{\mathbf{e}}}$ diperoleh apabila bagian riil dari semua nilai eigen matriks $(A - LC)$ bernilai negatif. Bentuk eksplisit matriks L dapat diperoleh apabila memenuhi syarat tertentu yang dipaparkan pada paper ini.

Kata Kunci: Observer, estimasi error, stabil asimtotik

1. Pendahuluan

Diberikan suatu kontrol linier sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= A\mathbf{x}(t) + Bu(t), \\ y(t) &= C\mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, dan $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Pada sistem (1.1), $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaan (*state*), $u(t) \in \mathbb{R}$ menyatakan input (*control*), dan $y \in \mathbb{R}$ menyatakan output.

Suatu *observer* untuk sistem (1.1) didefinisikan sebagai persamaan berikut:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)),\tag{1.2}$$

untuk suatu matriks $L \in \mathbb{R}^n$ dimana $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\hat{y}(t) = C\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Vektor $\hat{\mathbf{x}}(t)$ memiliki peran sebagai estimator untuk $\mathbf{x}(t)$, dengan estimasi error $\bar{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$. Estimasi yang baik mestilah memenuhi $\bar{\mathbf{e}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ bila $t \rightarrow \infty$, atau $\hat{\mathbf{x}}(t) \rightarrow \mathbf{x}(t)$ bila $t \rightarrow \infty$. Dalam makalah ini dikaji syarat yang menjamin agar persamaan (1.2) merupakan suatu *observer* yang baik untuk sistem (1.1).

2. Observer untuk Sistem Kontrol Linier Kontinu

Persamaan (1.2) merupakan observer yang baik untuk sistem kontrol linier (1.1) apabila

$$\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \rightarrow \bar{\mathbf{0}}\tag{2.1}$$

untuk $t \rightarrow \infty$. Dari (2.1) diperoleh

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{e}}} &= \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} \\ &= (A - LC)\bar{\mathbf{e}}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Jelas bahwa (2.2) merupakan suatu sistem persamaan diferensial linier orde 1 yang kestabilan asimtotiknya ditentukan oleh matriks $A - LC$. Bila sistem $\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) = (A - LC)\bar{\mathbf{e}}(t)$ stabil asimtotik, yaitu bagian riil dari semua nilai eigen $(A - LC)$ adalah negatif, maka $\bar{\mathbf{e}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ untuk $t \rightarrow \infty$, sehingga $\hat{\mathbf{x}}(t)$ merupakan *observer* yang baik untuk $\mathbf{x}(t)$. Dengan demikian diperlukan informasi tentang bentuk eksplisit dari matriks L sedemikian sehingga bagian riil dari semua nilai eigen matriks $(A - LC)$ adalah negatif.

Bentuk eksplisit L dapat dicari dengan menggunakan bentuk dual dari (1.1) yaitu

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = A^T \bar{\mathbf{e}} + C^T u. \quad (2.3)$$

Jika $u = -L^T \bar{\mathbf{e}}$, maka (2.3) dapat ditulis menjadi

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}} = (A^T - C^T L^T) \bar{\mathbf{e}} \quad (2.4)$$

yang solusinya adalah

$$\bar{\mathbf{e}}(t) = e^{(A^T - C^T L^T)t} \bar{\mathbf{e}}(0). \quad (2.5)$$

Dari (2.5) terlihat bahwa $\bar{\mathbf{e}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ jika bagian riil dari semua nilai eigen matriks $(A^T - C^T L^T)$ adalah negatif.

Teorema berikut menginformasikan syarat yang menjamin eksistensi matriks L sedemikian sehingga nilai eigen $(A^T - C^T L^T)$ dapat dibuatkan sesuai keinginan.

Teorema 2.1. [2] *Jika (A^T, C^T) adalah terkontrol lengkap maka terdapat matriks $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ sedemikian sehingga nilai eigen dari matriks $(A^T - C^T L^T)$ dapat ditempatkan secara sebarang.*

Bukti. Sistem (A^T, C^T) diubah menjadi bentuk kanonik terkontrol menggunakan transformasi Q , yaitu

$$Q = M_C W$$

dimana M_C adalah matriks keterkontrolan

$$M_C = [C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T],$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dan $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ adalah koefisien dari polinomial karakteristik

$$|sI - A^T| = s^n + a_1 s^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} s + a_n.$$

Definisikan variabel keadaan baru $\hat{\mathbf{e}}$ dengan

$$\bar{\mathbf{e}} = Q\hat{\mathbf{e}}.$$

Jika $\text{rank}(M_C)$ adalah n (berarti sistem terkontrol lengkap), maka matriks Q memiliki invers. Sehingga persamaan sistem $\dot{\mathbf{e}} = A^T \bar{\mathbf{e}} + C^T u$ menjadi

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} = Q^{-1} A^T Q \hat{\mathbf{e}} + Q^{-1} C^T u \quad (2.6)$$

dimana

$$Q^{-1} A^T Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

dan

$$Q^{-1} C^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Persamaan (2.7) dan (2.8) merupakan bentuk kanonik terkontrol. Kemudian akan dibuktikan jika sistem terkontrol lengkap, maka dimungkinkan untuk memilih nilai eigen yang diinginkan, misalkan $s = s_1, s = s_2, \dots, s = s_n$. Persamaan karakteristiknya berubah menjadi

$$(s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) = s^n + \alpha_1 s^{(n-1)} + \cdots + \alpha_{(n-1)} s + \alpha_n = 0. \quad (2.9)$$

Tulis

$$L^T Q = [\delta_n \ \delta_{n-1} \ \cdots \ \delta_1]. \quad (2.10)$$

Bila $u = -L^T Q \hat{\mathbf{e}}$ digunakan untuk mengontrol sistem (2.6), maka diperoleh persamaan

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}} = Q^{-1} A^T Q \hat{\mathbf{e}} - Q^{-1} C^T L^T Q \hat{\mathbf{e}}. \quad (2.11)$$

Persamaan karakteristik dari (2.11) adalah

$$|sI - Q^{-1} A^T Q + Q^{-1} C^T L^T Q| = 0. \quad (2.12)$$

Persamaan karakteristik ini sama dengan persamaan karakteristik untuk sistem $\dot{\mathbf{e}} = A^T \bar{\mathbf{e}} + C^T u$ dengan $u = -L^T \bar{\mathbf{e}}$ yang digunakan sebagai kontrol, yaitu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= A^T \bar{\mathbf{e}} + C^T u \\ &= (A^T - C^T L^T) \bar{\mathbf{e}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Persamaan karakteristik untuk sistem (2.13) adalah

$$\begin{aligned} |sI - A^T + C^T L^T| &= |Q^{-1}(sI - A^T + C^T L^T)Q| \\ &= |sI - Q^{-1} A^T Q + Q^{-1} C^T L^T Q| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (2.7), (2.8), dan (2.10) ke dalam persamaan karakteristik (2.12) diperoleh

$$|sI - Q^{-1}A^TQ + Q^{-1}C^TL^TQ|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| sI - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [\delta_n \ \delta_{n-1} \ \cdots \ \delta_1] \right| \\
&= \begin{vmatrix} s & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & s & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_n + \delta_n & a_{n-1} + \delta_{n-1} & \cdots & s + a_1 + \delta_1 \end{vmatrix} \\
&= s^n + (a_1 + \delta_1)s^{(n-1)} + \cdots + (a_{n-1} + \delta_{n-1})s + (a_n + \delta_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Persamaan karakteristik ini sama dengan persamaan karakteristik (2.9). Sehingga dengan menyamakan koefisiennya diperoleh

$$\begin{aligned}
a_1 + \delta_1 &= \alpha_1 \\
a_2 + \delta_2 &= \alpha_2 \\
&\vdots \\
a_n + \delta_n &= \alpha_n
\end{aligned}$$

$$L^T = [\alpha_n - a_n \ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \ \cdots \ \delta_1 - a_1] Q^{-1}. \quad \square$$

Berikut ini akan dikemukakan langkah-langkah untuk mendapatkan matriks L . Misalkan nilai eigen yang diinginkan adalah $s = s_1, s = s_2, \cdots, s = s_n$. Persamaan karakteristik dari $A_{L^T} = A^T - C^TL^T$ adalah

$$\begin{aligned}
|sI - A_{L^T}^T| &= (s - s_1)(s - s_2) \cdots (s - s_n) \\
&= s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

untuk suatu skalar $\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, n$. Berdasarkan teorema Cayley-Hamilton untuk A_{L^T} , maka berlaku

$$\phi(A_{L^T}) = A_{L^T}^n + \alpha_1 A_{L^T}^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} A_{L^T} + \alpha_n I = 0. \quad (2.14)$$

Perhatikan identitas berikut :

$$\begin{aligned}
A_{L^T} &= (A^T) - C^T L^T \\
A_{L^T}^2 &= A_{L^T} A_{L^T} \\
&= (A^T)^2 - A^T (C^T) L^T - (C^T) L^T A_{L^T} \\
&\vdots \\
A_{L^T}^n &= A_{L^T}^{n-1} A_{L^T} \\
&= (A^T)^n - (A^T)^{n-1} (C^T) L^T - (A^T)^{n-2} (C^T) L^T A_{L^T} - (A^T)^{n-3} (C^T) L^T (A_{L^T})^2 \\
&\quad - \dots - (A^T) (C^T) L^T A_{L^T}^{n-2} - (C^T) L^T A_{L^T}^{n-1}
\end{aligned}$$

Substitusikan identitas tersebut ke persamaan (2.14), sehingga diperoleh persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
\phi(A^T) &= (C^T)(\alpha_{n-1}L^T + \alpha_{n-2}L^T A_{L^T} + \dots + \alpha_1 L^T A_{L^T}^{n-2} - L^T A_{L^T}^{n-1}) \\
&\quad + (A^T)(C^T)(\alpha_{n-2}L^T + \dots + L^T A_{L^T}^{n-2}) + \dots \\
&\quad + (A^T)^{n-3} (C^T)(\alpha_1 L^T A_{L^T} + \dots + L^T A_{L^T}^2) \\
&\quad + (A^T)^{n-2} (C^T)(\alpha_1 L^T + \dots + L^T A_{L^T}) + (A^T)^{n-1} (C^T) L^T \\
&= \left[(C^T) (A^T)(C^T) \dots (A^T)^{n-1} (C^T) \right] \\
&\quad \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}L^T + \alpha_{n-2}L^T A_{L^T} + \dots + \alpha_1 L^T A_{L^T}^{n-2} - L^T A_{L^T}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}L^T + \dots + L^T A_{L^T}^{n-2} \\ \vdots \\ L^T \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \left[(C^T) (A^T)(C^T) \dots (A^T)^{n-1} (C^T) \right]^{-1} \phi(A^T) = \\
&\quad \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}L^T + \alpha_{n-2}L^T A_{L^T} + \dots + \alpha_1 L^T A_{L^T}^{n-2} - L^T A_{L^T}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}L^T + \dots + L^T A_{L^T}^{n-2} \\ \vdots \\ L^T \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Kemudian kalikan kedua sisi dengan $[0 \ 0 \ \dots \ 1]$, diperoleh persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
&[0 \ 0 \ \dots \ 1] \left[(C^T) (A^T)(C^T) \dots (A^T)^{n-1} (C^T) \right]^{-1} \phi(A^T) \\
&= [0 \ 0 \ \dots \ 1] \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}L^T + \alpha_{n-2}L^T A_{L^T} + \dots + \alpha_1 L^T A_{L^T}^{n-2} - L^T A_{L^T}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}L^T + \dots + L^T A_{L^T}^{n-2} \\ \vdots \\ L^T \end{bmatrix} \\
&= L^T
\end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai

$$L^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] M_C^{-1} P_{ch, A_{L^T}}(A^T), \quad (2.15)$$

dimana M_C adalah matriks keterkontrolan dan $P_{ch, A_{LT}}(A^T) = \phi(A^T)$ adalah polinomial karakteristik untuk matriks A_{LT} . Dengan demikian diperoleh

$$L = (L^T)^T = P_{ch, A_{LT}}^T(A^T)(M_C^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.16)$$

Persamaan (2.16) menunjukkan bahwa terdapat matriks $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, sehingga nilai eigen matriks $A^T - L^T C^T$ dapat ditempatkan secara sebarang. Dengan perkataan lain (1.2) merupakan observer yang baik untuk sistem (1.1).

3. Kesimpulan

Diberikan suatu kontrol linier sebagai berikut :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu(t), y(t) = C\mathbf{x}(t) \quad (3.1)$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, dan $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$. Pada sistem (3.1), $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ menyatakan vektor keadaan (*state*), $u(t) \in \mathbb{R}$ menyatakan input (*control*), dan $y \in \mathbb{R}$ menyatakan output.

Suatu *observer* untuk sistem (3.1) didefinisikan sebagai persamaan berikut :

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)), \quad (3.2)$$

untuk suatu matriks $L \in \mathbb{R}^n$ dimana $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\hat{y}(t) = C\hat{\mathbf{x}}(t)$.

Error antara $\mathbf{x}(t)$ dengan estimator $\hat{\mathbf{x}}(t)$ dinamakan error estimasi $\bar{\mathbf{e}}(t)$, yaitu $\bar{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, yang dibangun dari persamaan error dinamik $\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t)$. Apabila $\dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) = (A - LC)\bar{\mathbf{e}}(t)$ stabil asimtotik, yaitu bagian riil nilai eigen $(A - LC) < 0$, maka $\bar{\mathbf{e}}(t) \rightarrow \mathbf{0}$ untuk $t \rightarrow \infty$, dan $\hat{\mathbf{x}}(t)$ dikatakan *observer* yang baik untuk $\dot{\mathbf{x}}(t)$.

Bagian riil nilai eigen $(A - LC)$ dapat ditempatkan sebarang, yaitu apabila terdapat matriks $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ sebagai berikut.

$$L = (L^T)^T = P_{ch, A_{LT}}^T(A^T)(M_C^{-1})^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Daftar Pustaka

- [1] Anton, H dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Kedelapan. Jilid 1. Penerbit Erlangga, Jakarta
- [2] Antsaklis, P. J dan Michel, A. N. 2007. *A Linear Systems Primer*. Birkhauser, Boston
- [3] Hendricks. E, Ole. J dan P. H. Soronsen. 2008. *Linear System Control*. Springer, Berlin

- [4] Ogata, K. 2002. *Modern Control Engineering, Fourth Edition*. Prentice-Hall, New Jersey
- [5] Bastian. G dan N. Dautrebande. 1999. Positive linier Observers for Positive Linear Systems. *Proceedings European Control Conference ECC'99, Paper F371*
- [6] Luenberger, B.G. 1979. *Introduction to Dynamics System*. John Wiley and Sons, California
- [7] Golan, J.S. 2007. *The Linear Algebra A Beginning Graduate Student Ought to Know*. Second Edition. Springer, Dordrecht