Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **1** Hal. 131 – 139
ISSN : 2303–291X

PENENTUAN HARGA OPSI *CALL* TIPE EROPA MENGGUNAKAN METODE TRINOMIAL

MIKA ALVIONITA S, RIRI LESTARI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
Alvionita0905@gmail.com

Abstrak. Dalam makalah ini akan dibahas opsi *call* tipe Eropa menggunakan metode trinomial. Metode trinomial memiliki perubahan harga saham yang dipengaruhi oleh koefisien naik turun yang relatif sama dengan suku bunga. Permasalahan yang timbul dalam metode ini adalah persamaan linier yang digunakan *overdetermined*. Persamaan yang *overdetermined* diselesaikan dengan menggunakan invers semu *(pseudoinverse)*.

Kata Kunci: Overdetermined, invers semu *(pseudoinvers)*

1. Pendahuluan

Dalam melakukan investasi terdapat bermacam-macam aset yang dapat diperjualbelikan seperti uang, obligasi, saham, suku bunga dan lainnya. Seiring perkembangan zaman, pemilik aset ingin memiliki produk derivatif yang dapat meminimalkan kerugian dan memaksimalkan keuntungan dari aset yang diperjualbelikan. Produk derivatif tersebut yaitu opsi. Penentuan harga opsi *call* tipe Eropa menggunakan metode trinomial ini mempunyai tiga kemunginan nilai perubahan harga saham.

Metode trinomial yang digunakan dalam penentuan harga opsi *call* Eropa memiliki masalah karena persamaan linier yang digunakan *overdetermined* yaitu sistem persamaan dengan jumlah persamaan yang lebih banyak daripada jumlah variabel yang dicari. Persamaan linier yang *overdetermined* dapat diselesaikan dengan menggunakan invers matriks $A_{m\times n}$ yang disebut invers semu *(pseudoinverse)*, dinotasikan A^+.

Definisi 1.1. [5] *Misalkan matriks A merupakan matriks yang berukuran $m \times n$. Matriks A dikatakan matriks invers tergeneralisasi jika terdapat matriks X yang memenuhi syarat-syarat berikut.*

(i) $AXA = A$.
(ii) $XAX = X$.
(iii) $(XA)^t = XA$.
(iv) $(AX)^t = AX$.

Diketahui

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} S_1 \; S_2 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \; Q_2 \end{bmatrix}, \quad Q^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix},$$

$$PAQ = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dimana B adalah suatu matriks nonsingular berukuran $r \times r$.

Untuk menentukan matriks invers semu A^+ dapat dicari dengan memanfaatkan teorema berikut.

Teorema 1.2. [5] *Misalkan A adalah matriks berukuran $m \times n$ dan $PAQ = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dimana B adalah matriks nonsingular berukuran $r \times r$. Misalkan X adalah matriks berukuran $n \times m$ yang didefinisikan sebagai $Q^{-1}XP^{-1} = \begin{bmatrix} Z & U \\ V & W \end{bmatrix}$. Maka*

(a) X adalah invers tergeneralisasi dari A jika dan hanya jika $Z = B^{-1}$.
(b) X adalah invers tergeneralisasi refleksif dari A jika dan hanya jika $Z = B^{-1}$ dan $W = VBU$.
(c) X adalah invers tergeneralisasi lemah kanan dari A jika dan hanya jika $Z = B^{-1}$, $U = -B^{-1}P_1P_2^+$, dan $W = -VP_1P_2^+$.
(d) X adalah invers tergeneralisasi lemah kiri dari A jika dan hanya jika $Z = B^{-1}$, $V = -Q_2^+Q_1B^{-1}$, dan $W = -Q_2^+Q_1U$.
(e) X adalah invers semu dari A jika dan hanya jika $Z = B^{-1}$, $U = -B^{-1}P_1P_2^+$, $V = -Q_2^+Q_1B^{-1}$, dan $W = Q_2^+Q_1B^{-1}P_1P_2^+$.

P dan Q adalah matriks hasil operasi elementer baris dan kolom matriks $A_{m\times n}$, sedangkan r adalah rank matriks $A_{m\times n}$.

Pada metode ini diasumsikan pergerakan naik-turunnya harga saham (S) dalam periode tertentu memiliki tiga kemungkinan pergerakan saja. Di dalam pasar saham berlaku suku bunga bank pada periodenya yaitu sebesar r. Dengan pergerakan naik-turunnya harga saham (S), terdapat koefisien perubahan pergerakan tersebut yaitu a_1, a_2, dan a_3 dimana hubungan antara koefisien perubahan pergerakan naik-turunnya harga saham adalah $a_1 > a_2 > a_3$ [2].

2. Opsi pada Satu Periode

Pada bagian ini akan ditentukan nilai opsi *call* yang jatuh tempo pada akhir periode pertama. Misalkan harga saham (S) pada saat $t = 0$ adalah S_0 dan koefisien perubahan harga saham adalah a_1, a_2, dan a_3 dengan $a_1 > a_2 > a_3$. Maka pada saat periode $t = 1$, harga saham akan berubah menjadi S_1 dengan perubahan sebesar a_1S_0, a_2S_0, dan a_3S_0 dalam setiap pergerakan harga saham memiliki peluang sebesar $p_i (i = 1, 2, 3)$, dimana $\sum p_i = 1$ sehingga harga saham pada periode $t = 1$

dapat dituliskan dengan

$$S_1 = \begin{cases} S_1(1) = (1+a_1)S_0, & \text{dengan peluang } p_1, \\ S_1(2) = (1+a_2)S_0, & \text{dengan peluang } p_2, \\ S_1(3) = (1+a_3)S_0, & \text{dengan peluang } p_3. \end{cases} \tag{2.1}$$

Selanjutnya, misalkan C_0 adalah nilai opsi *call* pada saat $t = 0$ dan C_1 adalah nilai opsi *call* pada $t = 1$ (yaitu pada akhir periode pertama).Karena harga saham pada periode satu (S_1) memiliki tiga kemungkinan nilai, maka nilai opsi *call* pada saat $t = 1$ juga memiliki tiga kemungkinan nilai. Sehingga nilai opsi *call* diakhir periode pertama adalah

$$C_1 = \begin{cases} C_1(1) = \max\{(1+a_1)S_0 - K, 0\}, & \text{dengan peluang } p_1, \\ C_1(2) = \max\{(1+a_2)S_0 - K, 0\}, & \text{dengan peluang } p_2, \\ C_1(3) = \max\{(1+a_3)S_0 - K, 0\}, & \text{dengan peluang } p_3. \end{cases} \tag{2.2}$$

Persamaan (2.2) juga merupakan fungsi *pay off* (fungsi keuntungan) dari opsi *call* bagi pembeli opsi *call* merupakan kewajiban bagi penerbit opsi untuk menyediakan dana sebesar $C_1(1)$, $C_1(2)$, dan $C_1(3)$ diakhir periode $t = 1$. Oleh karena itu, penerbit opsi membentuk portofolio replikasi. Portofolio replikasi yang dibentuk terdiri dari saham (γ) dan tabungan (β).

Portofolio pada awal periode yaitu pada $t = 0$ adalah X_0. Nilai portofolio ini pada akhir periode pertama diharapkan sama dengan C_1. Portofolio ini disusun dalam bentuk γ lembar saham yaitu γS_0 dan dalam bentuk tabungan sebesar β yaitu $X_0 = S_0\gamma + \beta$.

Karena portofolio dibentuk dari penjualan opsi *call* pada awal periode ($t = 0$) maka diperoleh hubungan $X_0 = C_0$. Pada akhir periode pertama ($t = 1$), nilai porofolio akan menjadi X_1 dan terdiri dari bentuk saham sebesar $S_1\gamma$ dan dalam bentuk tabungan sebesar $(1 + r)\beta$. Jadi, bentuk portofolio diakhir periode ($t = 1$), yaitu

$$X_1 = S_1\gamma + (1 + r)\beta. \tag{2.3}$$

Karena portofolio pada akhir periode diharapkan cukup untuk memenuhi kewajiban penerbit opsi kepada pembeli opsi maka diperoleh hubungan

$$X_1 = C_1. \tag{2.4}$$

Dari Persamaan (2.3), maka akan ditentukan nilai γ dan β agar Persamaan (2.4) terpenuhi. Nilai S_1 akan berubah menjadi tiga kemungkinan nilai, sehingga nilai C_1 juga mempunyai tiga kemungkinan nilai, yaitu $C_1(1)$, $C_1(2)$, dan $C_1(3)$.

$$C_1 = \begin{cases} C_1(1) = (1+a_1)S_0\gamma + (1+r)\beta, & \text{dengan peluang } p_1, \\ C_1(2) = (1+a_2)S_0\gamma + (1+r)\beta, & \text{dengan peluang } p_2, \\ C_1(3) = (1+a_3)S_0\gamma + (1+r)\beta, & \text{dengan peluang } p_3. \end{cases} \tag{2.5}$$

Pada Persamaan (2.5), nilai γ dan β tidak diketahui. Untuk menentukan nilai γ dan β, persamaan (2.5) diubah menjadi matriks dengan pemisalan $a_1 = b$, $a_2 = c$ dan $a_3 = a$, sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0(1+b) & 1+r \\ S_0(1+c) & 1+r \\ S_0(1+a) & 1+r \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_1(1) \\ C_1(2) \\ C_1(3) \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

Pada persamaan (2.6) terdapat matriks yang harus ditentukan inversnya. Karena jumlah baris dan kolom berbeda maka invers matriks ditentukan dengan invers semu *(pseudoinverse)* sesuai dengan Teorema 1.2. Dengan memanfaatkan Teorema 1.2 maka invers semu dari matriks tersebut yaitu

$$A^+_{m\times n} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{S_0(1+c)}{1+r} & \frac{1}{1+r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-\frac{1}{2}(c-2a+b)}{c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc} \\ 0 & 1 & \frac{\frac{1}{2}(a-b)(b-c)}{c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \dfrac{1}{S_0(b-c)} & -\dfrac{1}{S_0(b-c)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{(c-a)}{b-c} & \dfrac{a-b}{b-c} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{-\frac{1}{2}(-2c+a-b)}{S_0(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)} \\ \dfrac{-\frac{1}{2}(c+a-2b)}{S_0(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)} \\ \dfrac{-\frac{1}{2}(c-2a+b)}{(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)S_0} \\ \dfrac{\frac{1}{2}(c^2-bc+c-2b+a+a^2-ab)}{(1+r)(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)} \\ \dfrac{\frac{1}{2}-bc-ca-2c+a^2+b+b^2+a}{(1+r)(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)} \\ \dfrac{c-2a+b+c^2-ca-ab+b^2}{2(1+r)(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh nilai γ dan β maka nilai opsi pada awal periode pertama $t=0$ bisa ditentukan, yaitu

$$\begin{aligned} C_0 &= \begin{bmatrix} S_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \beta \end{bmatrix} \\ C_0 &= \left(\frac{1}{2}\right) \left\{ \frac{(C_1(1)(2rb-ra-rc-ab-bc+a^2+c^2))}{(1+r)(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)} \right. \\ &+ \frac{(C_1(2)(2rc-ra-rb+b^2+a^2-bc-ac))}{(1+r)(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)} \\ &+ \left. \frac{(C_1(3)(2ra-rb-rc+c^2+b^2-ac-ab))}{(1+r)(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)} \right\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Pada penentuan harga opsi menggunakan metode trinomial diasumsikan $E(\rho_i - r) = 0$ sehingga diperoleh hubungan $a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 = r$ dan diketahui pula $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Persamaan (2.5) dan Persamaan (2.6) diatas dapat dibentuk dalam bentuk matriks dan akan dicari nilai probabilitas untuk perubahan harga saham dengan menggunakan invers semu. Misalkan nilai $a_1 = b$, $a_2 = c$, dan $a_3 = a$, maka

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & c & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

Dengan memanfaatkan Teorema (1.2) maka invers semu Persamaan (2.8) untuk nilai probabilitas tersebut yaitu

$$A^+_{m\times n} = \begin{bmatrix} 1-\dfrac{c}{b-c} & \dfrac{c-a}{b-c} \\ 0 \quad \dfrac{b}{b-c} & \dfrac{a-b}{b-c} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{1/2(c-a)(-b+c)}{c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc} & \dfrac{1/2(-c^2+ac-ab+b^2)(-b+c}{c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{b} & 0 \\ -\dfrac{1}{b} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^+_{m\times n} = \begin{bmatrix} \left(-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{-2b+a+c}{(c^2-ac+a^2+b^2-ab-bc)} & \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{-ab-bc+a^2+c^2}{(c^2-ac+a^2+b^2-ab-bc)} \\ \left(-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b-2c+a}{(c^2-ac+a^2+b^2-ab-bc)} & \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{b^2-bc-ac+a^2}{(c^2-ac+a^2+b^2-ab-bc)} \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{-c+2a-b}{(c^2-ac+a^2+b^2-ab-bc)} & \left(-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{-c^2+ac-b^2+ab}{(c^2-ac+a^2+b^2-ab-bc)} \end{bmatrix}$$

Setelah diperoleh invers semu dari Persamaan (2.8) maka nilai probabilitasnya, yaitu

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{2rb-ra-rc-ab-bc+a^2+c^2}{(c^2-ac+a^2+b^2-ab-bc)} \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{2rc-ra-rb+b^2+a^2-bc-ac}{(c^2-ac+a^2+b^2-ab-bc)} \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{2ra-rb-rc+c^2+b^2-ac-ab}{(c^2-ac+a^2+b^2-ab-bc)} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Nilai p_1, p_2, dan p_3 merupakan probabilitas semu. Disebut sebagai probabilitas semu karena probabilitas yang didapatkan dari hubungan antara $E(\rho_i - r) = 0$ sehingga nilai probabilitas ini berada diantara 0 sampai 1. Dari harga opsi *call* pada Persamaan (2.6) dan probabilitas semu pada persamaan (2.9) maka

$$\begin{aligned} C_0 &= \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{(C_1(1)(2rb-ra-rc-ab-bc+a^2+c^2)}{(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)(1+r)}\right\} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{(C_1(2)(2rc-ra-rb+b^2+a^2-bc-ac))}{(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)(1+r)}\right\} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}\right)\left\{\frac{(C_1(1)(2ra-rb-rc+c^2+b^2-ac-ab))}{(c^2-ca+a^2-ab+b^2-bc)(1+r)}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{1+r}\right)\sum_{i=1}^{3}(C_1(i)\times p_i) \\ &= \left(\frac{1}{1+r}\right)\left(\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\left(\frac{1}{i!j!(1-i-j)!}\ \left(p_1^i p_2^j p_3^{1-i-j}\max\left\{0,(1+a_1)^i\right.\right.\right.\right. \\ &\quad \left.\left.(1+a_2)^j(1+a_3)^{1-i-j}S_0-K\right)\right) \\ &\quad \text{berlaku untuk } i+j\le 1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) diatas merupakan rumus harga opsi *call* tipe Eropa menggunakan metode trinomial yang jatuh tempo pada akhir periode pertama. Kemudian akan ditentukan hubungan antara a_i $(i = 1, 2, 3)$ dan r. Dalam menentukan hubungan a_i dan r menggunakan penurunan dari asumsi $E(\rho_i - r) = 0$. Dari penurunan asumsi $E(\rho_i - r) = 0$ dan $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ maka akan diperoleh hubungan antara p_1 dan p_2 sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{r - a_3}{a_2 - a_3} + \frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_3} p_1 > 0, \\ a_2 - a_3 < 0 &\Leftrightarrow r - a_3 + (a_3 - a_1)p_1 \leq 0, \\ 0 &\leq \frac{a_3 - r}{a_3 - a_1} < 1. \end{aligned}$$

Kemudian, ditentukan hubungan p_3 dan p_1

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{r - a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_2} p_3 > 0, \\ a_1 - a_2 < 0 &\Leftrightarrow r - a_2 + (a_2 - a_3)p_3 \leq 0, \\ 0 &\leq \frac{a_2 - r}{a_2 - a_3} < 1. \end{aligned}$$

Jadi, hubungan a_i dan r yaitu

$$a_3 < 0 \leq r \leq a_2 < a_1.$$

3. Opsi pada Dua Periode

Pada bagian sebelumnya telah diperoleh harga opsi *call* tipe Eropa dengan menggunakan metode trinomial yang jatuh tempo pada periode pertama. Selanjutnya akan ditentukan harga opsi *call* tipe Eropa yang jatuh tempo pada akhir periode kedua. Misalkan harga saham (S) pada saat $t = 0$ adalah S_0 dan koefisien perubahan harga saham adalah a_1, a_2, dan a_3 dengan $a_1 > a_2 > a_3$. Dengan melakukan tahapan yang sama sesuai dengan opsi satu periode maka akan diperoleh nilai opsi *call* yang jatuh tempo pada periode kedua, yaitu

$$C_2 = \begin{cases} C_2(11) = (1 + a_1)^2 S_0\gamma + (1 + r)^2\beta, & \text{dengan peluang } p_1^2 \\ C_2(12) = (1 + a_1)(1 + a_2)S_0\gamma + (1 + r)^2\beta, & \text{dengan peluang } p_1p_2 \\ C_2(13) = (1 + a_1)(1 + a_3)S_0\gamma + (1 + r)^2\beta, & \text{dengan peluang } p_1p_3 \\ C_2(21) = (1 + a_1)(1 + a_2)S_0\gamma + (1 + r)^2\beta, & \text{dengan peluang } p_1p_2 \\ C_2(22) = (1 + a_2)^2 S_0\gamma + (1 + r)^2\beta, & \text{dengan peluang } p_2^2 \\ C_2(23) = (1 + a_2)(1 + a_3)S_0\gamma + (1 + r)^2\beta, & \text{dengan peluang } p_2p_3 \\ C_2(31) = (1 + a_1)(1 + a_3)S_0\gamma + (1 + r)^2\beta, & \text{dengan peluang } p_1p_3 \\ C_2(32) = (1 + a_2)(1 + a_3)S_0\gamma + (1 + r)^2\beta, & \text{dengan peluang } p_2p_3 \\ C_2(33) = (1 + a_3)^2 S_0\gamma + (1 + r)^2\beta, & \text{dengan peluang } p_3^2 \end{cases}$$

Kemudian akan ditentukan nilai C_0 dengan memperhatikan hubungan C_0, C_1, dan C_2. Hubungan antara $C_1(i)$ dan $C_2(ij)$ dapat dibentuk harga opsi *call* pada akhir periode kedua yaitu:

$$\begin{aligned} C_1(1) &= \frac{1}{1 + r}\left((C_2(11) \times p_1) + (C_2(12) \times p_2) + (C_2(13) \times p_3)\right). \\ C_1(2) &= \frac{1}{1 + r}\left((C_2(21) \times p_1) + (C_2(22) \times p_2) + (C_2(23) \times p_3)\right). \\ C_1(3) &= \frac{1}{1 + r}\left((C_2(31) \times p_1) + (C_2(32) \times p_2) + (C_2(33) \times p_3)\right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Jadi, harga opsi *call* tipe Eropa menggunakan metode trinomial pada dua periode dengan memandang γ dan β memiliki fungsi yang sama di setiap periodenya, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
C_0 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 & \big(\big(\max\big\{0,(1+a_1)^2S_0-K\big\}\,p_1^2\big) + (\max\{0,(1+a_1)(1+a_2)S_0-K\}\,p_1p_2) \\
& + (\max\{0,(1+a_1)(1+a_3)S_0-K\}\,p_1p_3) + (\max\{0,(1+a_2)(1+a_1)S_0-K\}\,p_2p_1) \\
& + \big(\max\big\{0,(1+a_2)^2S_0-K\big\}\,p_2^2\big) + (\max\{0,(1+a_2)(1+a_3)S_0-K\}\,p_2p_3) \\
& + (\max\{0,(1+a_3)(1+a_1)S_0-K\}\,p_3p_1) + (\max\{0,(1+a_3)(1+a_2)S_0-K\}\,p_3p_2) \\
& + \big(\max\big\{0,(1+a_3)^2S_0-K\big\}\,p_3^2\big)\big) \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2 & \left(\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\left(\frac{2!}{i!j!(2-i-j)!}\right)\right. \\
& \left. p_1^ip_2^jp_3^{2-i-j}\max\{0,(1+a_1)^i(1+a_2)^j(1+a_3)^{2-i-j}S_0-K\}\right) \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

berlaku untuk $i+j \leq 2$.

Persamaan diatas merupakan rumus harga opsi *call* tipe Eropa menggunakan metode trinomial yang jatuh tempo pada akhir periode kedua.

4. Opsi pada n Periode

Misalkan S_n adalah harga saham pada periode ke-n dengan a_1, a_2, dan a_3 koefisien perubahan harga saham. Hubungan antara S_n dan S_{n-1} dinyatakan oleh

$$S_n(W_1,W_2,\cdots,W_{n-1},a_i) = a_iS_{n-1}(W_1,W_2,\cdots,W_{n-1})$$

dengan $S_n(W_1,W_2,\cdots,W_{n-1},a_i)$ adalah perubahan harga saham yang dipengaruhi oleh koefisien perubahan harga saham sebesar a_i, dengan $i=1,2,3$. Harga opsi *call* yang jatuh tempo pada akhir periode ke-n dengan *strike price* K adalah

$$C_n(W_1,W_2,\cdots,W_n) = \max\{S_n(W_1,W_2,\cdots,W_n)-K,0\}$$

Portofolio replikasi yang dibentuk oleh penerbit opsi *call* pada awal periode pertama cukup untuk memenuhi kewajiban penerbit opsi kepada pembeli opsi pada akhir periode ke-n sehingga diperoleh hubungan

$$X_n(W_1,W_2,\cdots,W_n) = C_n(W_1,W_2,\cdots,W_n)$$

sedangkan hubungan antara nilai portofolio X_n dan X_{n-1} dinyatakan oleh

$$C_{n-1}((W_1,W_2,\cdots,W_{n-1},a_i) = \left(\frac{1}{1+r}\right)^{n-1}((C_n\times p_1)+C_n\times p_2)+C_n\times p_3))$$

dimana $i=1,2,3$.

Secara rekursif harga opsi *call* tipe Eropa menggunakan metode trinomial yang jatuh tempo pada akhir periode ke-n diperoleh sebagai berikut.

$$C_0 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\right)\left(p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j} \max\left\{0,(1+a_1)^i\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.(1+a_2)^j(1+a_3)^{n-i-j}S_0 - K\right\}\right)\right) \tag{4.1}$$

berlaku untuk $i + j \leq n$.

5. Harga Opsi *Call* yang Jatuh Tempo pada Akhir Periode ke-n

Saham ABC diperdagangkan di bursa dengan harga R_p 17.000,00 perlembar. Ade membeli satu opsi *call* untuk satu lembar saham ABC dan jatuh tempo dalam satu bulan kedepan. Harga *exercise* opsi *call* tersebut sebesar R_p 18.000,00 serta suku bunga sebesar 7%. Koefisien perubahan pergerakan naik-turunnya berikut.

n	C_0	n	C_0	n	C_0
1	R_p1.042,00	40	R_p 15.798,00	115	R_p 16.992,00
2	R_p 1.980,00	45	R_p 16.143,00	120	R_p 16.995,00
3	R_p 2.870,00	50	R_p 16.389,00	125	R_p 16.99,00
4	R_p 3.688,00	55	R_p 16.564,00	130	R_p 16.997,00
5	R_p 4.499,00	60	R_p 16.689,00	135	R_p 16.998,00
6	R_p 5.281,00	65	R_p 16.779,00	140	R_p 16.999,00
7	R_p 6.006,00	70	R_p 16.842,00	145	R_p 16.999,00
8	R_p 6.701,00	75	R_p 16.887,00	150	R_p 16.999,00
9	R_p 7.351,00	80	R_p 16.920,00	155	R_p 16.999,00
10	R_p 7.960,00	85	R_p 16.943,00	160	R_p 17.000,00
15	R_p 10.510,00	90	R_p 16.959,00	165	R_p 17.000,00
20	R_p 12.360,00	95	R_p 16.971,00	170	R_p 17.000,00
25	R_p 13.6880,00	100	R_p 16.979,00	175	R_p 0,00
30	R_p 14.637,00	105	R_p 16.985,00	180	R_p 0,00
35	R_p	110	R_p 16.989,00	185	R_p 0,00

Pada tabel diatas dapat dilihat bahwa harga opsi *call* yang jatuh tempo pada saat periode ke-175 sampai periode ke-n dari saham ABC adalah R_p 0,00 karena harga opsi *call* diakhir periode telah melebihi *strike price*. Oleh sebab itu harga opsi *call* tidak digunakan.

6. Kesimpulan dan Saran

Harga opsi *call* tipe Eropa dengan menggunakan metode trinomial yang jatuh tempo pada akhir periode ke-n dapat dirumuskan dengan

$$C_0 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \left(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\right)\left(p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j} \max\left\{0,(1+a_1)^i\right.\right.\right.$$
$$\left.(1+a_2)^j(1+a_3)^{n-i-j}S_0 - K\right\}\Big)$$

berlaku untuk $i + j \leq n$.

Pada penulisan jurnal ini, harga opsi *call* tipe Eropa menggunakan metode trinomial dengan tiga kemungkinan perubahan harga saham yang merupakan fokus pembahasan. Setiap perubahan harga saham dipengaruhi oleh koefisien naik turunnya harga saham. Koefisien naik turun harga saham relatif sama dengan suku bunga. Selanjutnya untuk penelitian berikutnya dapat dibahas penentuan harga opsi *call* tipe Eropa menggunakan metode trinomial dengan koefisien naik-turun harga saham berbeda dengan suku bunga.

7. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Dr. Admi Nazra dan Ibu Radhiatul Husna, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Korn O. dan Koziol C. 2006. Bond Portfolio Optrimization A Risk-Return Approach, *The Journal of Fixed Income*

[2] Kwok, Yue-Kuen. 1998. *Mathematical Models of Financial Derivatives.* Second Edition. Springer, Singapore

[3] Ross, M.S. 1999. *Introduction To Mathematical Finance: Option and Other Topics.* Cambridge University Press, Cambridge

[4] Schoot, J.R. 1997. *Matrix Analysis for Statistics.* A Wiley Interscience Publication, New York

[5] Thomas, L.B dan P.L. Odell. 1971. *Generalized Inverse Matrices.* John Wiley dan Sons. Inc, United States of America