

INTEGRASI NUMERIK DENGAN METODE KUADRATUR GAUSS-LEGENDRE MENGGUNAKAN PENDEKATAN INTERPOLASI HERMITE DAN POLINOMIAL LEGENDRE

Aulia Radesa, Narwen, Bukti Ginting

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : auliaradesa@gmail.com*

Abstrak. Integrasi Numerik merupakan metode aproksimasi untuk memperoleh nilai integral suatu fungsi secara numerik. Metode ini digunakan pada fungsi-fungsi yang diintegrasikan secara analitik agak sulit. Salah satu metode aproksimasi integral menggunakan Metode Kuadratur Gauss-Legendre, karena metode ini memiliki error yang kecil dan perumusan yang sederhana. Untuk mendapatkan perumusan tersebut diperlukan fungsi pembobot dengan pendekatan Interpolasi Hermite. Interpolasi Hermite membentuk polinomial yang berderajat $2n-1$ dan titik yang digunakan sebanyak n titik, dimana setiap titik-titik tersebut merupakan pembuat nol pada polinomial Legendre ($p_n(x) = 0$) dan terletak pada interval $[-1, 1]$.

Kata Kunci: Kuadratur Gauss, Interpolasi Hermite, Polinomial Legendre, Interpolasi Lagrange

1. Pendahuluan

Aproksimasi integrasi dalam metode numerik dapat terbagi menjadi dua bagian besar berdasarkan cara pengambilan panjang interval^[2]. Kedua macam metode aproksimasi tersebut bertujuan untuk memperoleh ketelitian yang lebih mendekati nilai sebenarnya dan kedua metode tersebut yaitu:

(1) *Metode Newton-Cotes*

Dalam pendekatan metode numerik dengan aturan Newton Cotes, fungsi integral $f(x)$ dihamperi dengan polinom $p_n(x)$. Selanjutnya integrasi dilakukan terhadap $p_n(x)$ karena suku-suku polinom lebih mudah untuk diintegrasikan. Adapun perumusan dengan metode Newton-Cotes yaitu: Rumus trapesium, Rumus Simpson 1/3, Rumus Simpson 3/8, Rumus Boole.

(2) *Metode Kuadratur Gauss*

Pendekatan lain dengan metode Kuadratur Gauss, nilai integrasi numerik cukup diperoleh dengan menghitung nilai fungsi $f(x)$ pada beberapa titik tertentu. Pada Metode Kuadratur Gauss terdapat dua perumusan untuk mendapatkan nilai integrasi numerik, yaitu: Kuadratur Gauss-Legendre dan Kuadratur Clenshaw-Curtis. Metode Kuadratur Gauss-Legendre dan Metode Kuadratur Clenshaw-Curtis adalah metode aproksimasi integral yang memiliki ketelitian

yang hampir sama, namun Metode Gaus-Legendre cenderung lebih sederhana dan lebih mudah dimengerti [3].

Perumusan dengan Kuadratur Gaus pada aproksimasi integrasi $f(x)$ dengan interval $[-1, 1]$ untuk n titik yang besar ($n \geq 3$) membutuhkan perhitungan yang rumit. Oleh karena itu perlu cara lain untuk perhitungannya, yaitu dengan menggunakan rumus interpolasi Hermite. Interpolasi tersebut membentuk polinomial yang berderajat $2n - 1$ dengan menggunakan n titik, dengan memisalkan n titik tersebut adalah titik-titik pembuat nol pada polinomial Legendre. Kemudian dengan menggunakan titik-titik pembuat nol polinomial Legendre maka diperoleh perumusan yang dinamakan Integrasi Kuadratur Gaus-Legendre.

2. Pembahasan

2.1. Kuadratur Gauss-Legendre dengan n titik

Misalkan diberikan sebuah fungsi $f(x)$. Fungsi $f(x)$ ini dapat dihamperi dengan menggunakan definisi sebagai berikut

$$f(x) = H_n(x) + \varepsilon_n(x), \quad (2.1)$$

dengan

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^n y_i h_i(x) + \sum_{i=1}^n y'_i \tilde{h}_i(x), \quad (2.2)$$

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[l_i(x)]^2, \quad (2.3)$$

$$h_i(x) = [1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)][l_i(x)]^2, \quad (2.4)$$

$$l_i(x) = \frac{\psi_n(x)}{(x - x_i)\psi'_n(x_i)}, \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_n(x) = [\psi_n(x)]^2 \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}; \xi \in [-1, 1], \quad (2.6)$$

$$\psi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n). \quad (2.7)$$

Untuk mendapatkan rumus integrasi pada interval $[-1, 1]$ maka kedua ruas pada persamaan (2.1) diintegrasikan menjadi

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 H_n(x)dx + \int_{-1}^1 \varepsilon_n(x)dx. \quad (2.8)$$

Dari persamaan (2.3), dengan $i = 1, \dots, n$ diperoleh integral $\tilde{h}_i(x)$ dengan batas $[-1, 1]$.

$$\int_{-1}^1 \tilde{h}_i(x)dx = \int_{-1}^1 \frac{\psi_n(x)}{\psi'_n(x_i)} l_i(x)dx.$$

Diketahui bahwa polinomial Legendre yang berderajat n adalah sebagai berikut

$$p_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n,$$

dengan $(x^2 - 1)^n$ polinom berderajat $2n$ sehingga

$$\psi_n(x) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} p_n(x).$$

Jadi

$$\int_{-1}^1 \tilde{h}_i(x) dx = \frac{1}{p'_n(x_i)} \int_{-1}^1 p_n(x) l_i(x) dx. \quad (2.9)$$

Teorema 2.1. *Dua polinomial Legendre yang berbeda akan saling tegak lurus (orthogonal) pada interval $-1 < x < 1$, jika*

- (1) $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = 0; m \neq n$,
- (2) $\int_{-1}^1 P_l^2(x) dx = \frac{2}{2l+1}$.

Dari persamaan (2.9) menunjukkan bahwa $l_i(x)$ adalah polinomial berderajat $(n-1)$. Dengan menggunakan Teorema 2.1 maka

$$\int_{-1}^1 \tilde{h}_i(x) dx = \frac{1}{p'_n(x_i)} \cdot 0 = 0. \quad (2.10)$$

Dengan sifat ortogonalitas polinomial Legendre maka persamaan (2.8) menjadi

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n f(x_i) [l_i(x)]^2 dx + 2 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^n f(x_i) l'_i(x) \tilde{h}_i(x) dx + \int_{-1}^1 \varepsilon_n(x) dx.$$

Karena $\int_{-1}^1 \tilde{h}_i(x) dx = 0$ maka

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i + \int_{-1}^1 \varepsilon_n(x) dx, \quad (2.11)$$

dengan $w_i = \int_{-1}^1 [l_i(x)]^2 dx$ dan $\varepsilon_n(x) = \frac{[\psi(x)]^2}{(2n)!} f^{2n}(\xi)$, $\xi \in [-1, 1]$. Persamaan (2.11) dinamakan rumus integrasi Kuadratur Gauss-Legendre.

2.2. Rumus Bobot

Untuk menyederhanakan fungsi bobot (w_i) pada persamaan (2.11), maka dapat dituliskan

$$w_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx.$$

Rumus bobot (w_i) pada persamaan (2.11) dapat disederhanakan menjadi rumus yang mudah dikerjakan untuk n yang lebih besar.

Diketahui bahwa salah satu persamaan rekursif polinomial Legendre adalah

$$(2i+1)x p_i(x) = (i+1)p_{i+1}(x) - i p_{i-1}(x) \quad (2.12)$$

Akibat 2.2. *Persamaan identitas Cristoffel polinomial Legendre didefinisikan sebagai berikut*

$$\sum_{i=0}^n (2i+1) p_i(t) p_i(x) = \frac{(n+1)[p_{n+1}(t)p_n(x) - p_{n+1}(x)p_n(t)]}{(t-x)} \quad (2.13)$$

Bukti. Kalikan persamaan (2.12) dengan $p_i(t)$ sehingga

$$(2i+1)xp_i(x)p_i(t) = (i+1)p_{i+1}(x)p_i(t) + ip_{i-1}(x)p_i(t) \quad (2.14)$$

Misalkan terdapat persamaan lain yang sama dengan persamaan (2.14) sebagai berikut

$$(2i+1)tp_i(x)p_i(t) = (i+1)p_{i+1}(t)p_i(x) + ip_{i-1}(t)p_i(x) \quad (2.15)$$

Kurangi persamaan (2.15) dengan persamaan (2.14)

$$(2i+1)(t-x)p_i(x)p_i(t) = (i+1)[p_{i+1}(t)p_i(x) - p_i(t)p_{i+1}(x)] - i[p_i(t)p_{i-1}(x) - p_{i-1}(t)p_i(x)] \quad (2.16)$$

Dengan persamaan (2.16) jumlahkan untuk $i = 1$ sampai dengan $i = n$, diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (i+1)[p_{i+1}(t)p_i(x) - p_i(t)p_{i+1}(x)] &= (t-x) \sum_{i=1}^n (2i+1)p_i(x)p_i(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n i[p_i(t)p_{i-1}(x) - p_{i-1}(t)p_i(x)]. \end{aligned}$$

Dengan metode telescoping maka ruas kiri menjadi

$$(n+1)[p_{n+1}(t)p_n(x) - p_n(t)p_{n+1}(x)] - (t-x) = (t-x) \sum_{i=0}^n (2i+1)p_i(x)p_i(t).$$

Suku terakhir pada ruas kiri dapat dipindahkan ke ruas kanan sehingga penjumlahan dimulai dari $i = 0$ sampai $i = n$. Maka persamaan dibawah ini dapat didefinisikan sebagai Identitas Cristoffel

$$\frac{(n+1)[p_{n+1}(t)p_n(x) - p_{n+1}(x)p_n(t)]}{(t-x)} = \sum_{i=0}^n (2i+1)p_i(t)p_i(x). \quad (2.17) \quad \square$$

Diberikan pembuat nol dari polinomial $p_n(x)$ adalah x_k , $k = 1, 2, \dots, n$, dengan mengganti t dengan x_k pada persamaan (2.17),

$$\sum_{i=0}^n (2i+1)p_i(x_k)p_i(x) = \frac{(n+1)[p_{n+1}(x_k)p_n(x) - p_{n+1}(x)p_n(x_k)]}{(x_k - x)}. \quad (2.18)$$

Integralkan pada interval $[-1, 1]$ diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (2i+1)p_i(x_k) \int_{-1}^1 p_i(x)dx &= \int_{-1}^1 \frac{(n+1)[p_{n+1}(x_k)p_n(x) - p_{n+1}(x)p_n(x_k)]}{(x_k - x)} dx \\ &= (n+1) \left[p_{n+1}(x_k) \int_{-1}^1 \frac{p_n(x)}{(x_k - x)} dx - \right. \\ &\quad \left. p_n(x_k) \int_{-1}^1 \frac{p_{n+1}(x)}{(x_k - x)} dx \right] \end{aligned}$$

Karena x_k adalah pembuat nol pada $p_n(x)$ maka $p_n(x_k) = 0$, sehingga

$$\sum_{i=0}^n (2i+1)p_i(x_k) \int_{-1}^1 p_i(x)dx = -(n+1)p_{n+1}(x_k) \int_{-1}^1 \frac{p_n(x)}{x - x_k} dx.$$

Dengan menggunakan kasus khusus pada Teorema 2.1 dimana $\int_{-1}^1 p_n(x)dx = 0$ dengan $n \neq 0$, maka

$$\sum_{i=0}^n (2i+1)p_i(x_k) \int_{-1}^1 p_i(x)dx = 2.$$

Maka

$$\begin{aligned} -(n+1)p_{n+1}(x_k) \int_{-1}^1 \frac{p_n(x)}{x-x_k} dx &= 2 \\ \int_{-1}^1 \frac{p_n(x)}{x-x_k} dx &= \frac{-2}{(n+1)p_{n+1}(x_k)}. \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan rumus bobot sebagai berikut

$$w_i = \frac{-2}{(n+1)p'_n(x_i)p_{n+1}(x_i)}. \quad (2.19)$$

2.3. Rumus Galat (Error) Kuadratur Gauss-Legendre

Dari persamaan (2.8), galat (*error*) untuk interpolasi Hermite adalah

$$E_n(f) = \int_{-1}^1 \varepsilon_n(x)dx = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^1 [\psi(x)]^2 dx, \xi \in [-1, 1], \quad (2.20)$$

dengan $\psi(x) = \frac{p_n(x)}{A_n}$. Dengan menggunakan Teorema 2.1 diketahui bahwa

$$\int_{-1}^1 p_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (2.21)$$

Karena A_n koefisien dari x^n pada polinomial Legendre ($p_n(x)$) maka

$$[A_n]^2 = \left[\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \right]^2. \quad (2.22)$$

Substitusikan persamaan (2.21) dan persamaan (2.22) ke dalam persamaan (2.20) sehingga diperoleh galat Kuadratur Gauss-Legendre,

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2} \cdot \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}. \quad (2.23)$$

Untuk membuat galat(*error*) ke bentuk yang lebih mudah dipahami, misalkan

$$e_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2}, \quad (2.24)$$

selanjutnya definisikan rumus *Stirling* sebagai berikut:

$$n! \simeq e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}. \quad (2.25)$$

Substitusi persamaan (2.25) ke persamaan (2.24) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} e_n &= \frac{2^{2n+1}(e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n})^4}{(2n+1)[e^{-2n} (2n)^{2n} \sqrt{4\pi n}]^2} = \frac{2^{2n} \cdot 2 \cdot e^{-4n} n^{4n} (2\pi n)^2}{(2n+1)e^{-4n} 4^{2n} n^{4n} 4\pi n} \\ &= \frac{2(2\pi n)^2}{(2n+1)4^n 4\pi n} = \frac{2\pi n}{(2n+1)4^n} \cong \frac{\pi}{4^n}. \end{aligned}$$

Jika $n \rightarrow \infty$, maka $e_n \rightarrow 0$.

Misalkan nilai maksimum fungsi $f(x)$ pada turunan ke- $2n$ sebagai

$$M_{2n} = \max_{-1 \leq x \leq 1} \frac{|f^{(2n)}(x)|}{(2n)!}, \quad n \geq 0, \quad (2.26)$$

dengan $f(x)$: fungsi yang dapat diturunkan tak terbatas pada $[-1, 1]$, terdapat supremum untuk $n \geq 0$ maka $M_{2n} < \infty$. Sehingga didapatkan bentuk galat (*error*) yang lebih mudah dipahami sebagai berikut.

$$|E_n(f)| \leq \frac{\pi}{4^n} M_{2n}. \quad (2.27)$$

3. Kesimpulan

Perumusan Kuadratur Gauss-Legendre pada aproksimasi integrasi $f(x)$ pada interval $[-1, 1]$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i + E_n(f),$$

dengan x_i adalah titik-titik pembuat nol ($p_n(x)$), $f(x_i)$ adalah fungsi dengan variabel x_i ; w_i adalah interval yang ditentukan (bobot); $E_n(f)$ adalah galat atau *error* aproksimasi sebagai berikut.

$$w_i = \frac{-2}{(n+1)p'_n(x_i)p_{n+1}(x_i)}$$

$$E_n(f) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2} \cdot \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}, \quad \xi \in [-1, 1].$$

Dengan asumsi $f(x)$ dapat diturunkan $2n$ kali dan kontinu pada $[-1, 1]$.

Daftar Pustaka

- [1] Atkinson, E.Kendall. 1989. *An Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition. John Wiley.
- [2] Munir, Rinaldi. 2003. *Metode Numerik*, Edisi ke-5. Informatika. Bandung.
- [3] Scheid, Francis. 1988. *Numerical Analysis*, 2nd Edition. McGraw-Hill.
- [4] Susatio, Yerri. 2005. *Metode Numerik Berbasis MathCAD*. Andi. Yogyakarta.