PENERAPAN METODE *ADAMS-BASHFORTH-MOULTON* ORDE EMPAT UNTUK MENENTUKAN SOLUSI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINIER HOMOGEN ORDE TIGA KOEFSISIEN KONSTAN

DELVITRI MURNI, BUKTI GINTING, NARWEN

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : delvitrimurni21@gmail.com*

Abstrak. Persamaan diferensial linier homogen orde tiga koefisien konstan direduksi menjadi persamaan diferensial biasa orde-1, yaitu $y' = f(x, y)$ dengan syarat awal $y(x_0) = y_0$. Persamaan diferensial biasa orde-1 diselesaikan menggunakan metode *Runge-Kutta* orde empat untuk menentukan nilai pendekatan y_1, y_2 , dan y_3 . Selanjutnya, digunakan metode *Adams-Bashforth* orde empat untuk menentukan nilai pendekatan $y_4, y_5, \dots$, dst sebagai prediktor. Nilai yang ditampilkan oleh metode *Adams-Bashforth* orde empat digunakan pada metode *Adams-Moulton* orde empat sebagai korektor. Proses metode *Adams-Bashforth* orde empat dan metode *Adams-Moulton* orde empat dikatakan sebagai metode *Adams-Bashforth-Moulton* orde empat atau metode prediktor-korektor.

Kata Kunci: Persamaan diferensial, *Runge-Kutta*, *Adams-Bashforth*, *Adams-Moulton*, prediktor-korektor

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan suatu fungsi yang tak diketahui. Meskipun persamaan seperti itu seharusnya disebut persamaan turunan, namun istilah persamaan diferensial (*aequatio differentialis*) yang diperkenalkan oleh Leibniz pada tahun 1676 sudah umum digunakan [1].

Metode yang dikembangkan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa secara numerik, terbagi atas dua yaitu metode satu langkah (*one-step*) dan metode banyak langkah (*multi-step*). Metode satu langkah membutuhkan satu nilai awal untuk mendapatkan nilai sekarang, dengan kata lain hanya dibutuhkan nilai y_r untuk mendapatkan nilai y_{r+1} , sedangkan metode banyak langkah membutuhkan dua atau lebih nilai sebelumnya untuk mendapatkan nilai sekarang, dengan kata lain dibutuhkan nilai $y_0, y_1, \dots, y_r$ dengan $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ untuk menghitung nilai y_{r+1} . Nilai-nilai awal tersebut diperoleh dari metode satu langkah. Metode banyak langkah disebut metode prediktor-korektor, karena dalam penyelesaiannya digunakan persamaan prediktor dan persamaan korektor. Metode *Adams-Bashforth-Moulton*, metode *Milne-Simpson* dan metode *Hamming* merupakan metode banyak langkah.

Dalam artikel ini akan dibicarakan penyelesaian persamaan diferensial linier homogen orde tiga koefisien konstan menggunakan metode *Adams-Bashforth-Moulton* orde empat. Pada prinsipnya, metode *Adams-Bashforth-Moulton* orde empat memberikan solusi yang cukup akurat dalam menyelesaikan persamaan diferensial. Metode satu langkah yang digunakan untuk mencari solusi awal adalah metode *Runge-Kutta* orde empat, dimana metode *Runge-Kutta* merupakan alternatif dari metode deret Taylor yang tidak membutuhkan perhitungan turunan. Kelebihan dari metode *Runge-Kutta* ini memiliki ketelitian yang lebih tinggi dibandingkan dengan metode *Euler*, metode *Heun* dan metode deret Taylor

2. Pembahasan

Penurunan rumus metode *Adams-Bashforth-Moulton* orde empat diperoleh dari persamaan diferensial sebagai berikut

$$f(x, y(x)) = \frac{dy}{dx}, \quad (2.1)$$

dengan $x_r \leq x \leq x_{r+1}$.

Persamaan 2.1) diintegrasikan dari x_r hingga x_{r+1} yaitu

$$\begin{aligned} \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x)) dx &= \int_{x_r}^{x_{r+1}} \frac{dy}{dx} dx \\ &= y_{r+1} - y_r, \end{aligned}$$

atau

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} f(x, y(x)) dx, \quad (2.2)$$

Fungsi $f(x, y(x))$ dapat dinyatakan sebagai fungsi polinomial $p(x)$, sehingga persamaan (2.2) menjadi

$$y_{r+1} = y_r + \int_{x_r}^{x_{r+1}} p(x) dx. \quad (2.3)$$

2.1. Metode *Adams-Bashforth*

Metode *Adams-Bashforth* diperoleh dengan menggunakan interpolasi beda mundur Newton berderajat tiga yang menginterpolasi $f(x, y(x))$ pada titik $x_r, x_{r-1}, x_{r-2}, x_{r-3}$, maka hampiran fungsi $p(x)$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$p_3(x) = f_r + u \nabla f_r + \frac{u(u+1)}{2!} \nabla^2 f_r + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!} \nabla^3 f_r, \quad (2.4)$$

dengan

$$u = \frac{x - x_r}{h} \quad (2.5)$$

atau

$$x = x_r + hu. \quad (2.6)$$

Jika $x = x_r$ dan $x = x_{r+1}$ masing-masing disubstitusikan ke dalam persamaan (2.5), maka diperoleh $0 \leq u \leq 1$. Jika persamaan (2.6) diturunkan terhadap variabel u , maka diperoleh

$$dx = hdu, \text{ dan}$$

$$\begin{aligned} \int_{x_r}^{x_{r+1}} p_3(x)dx &= \int_{x_r}^{x_{r+1}} p_3(x)hdu \\ &= h \int_0^1 (f_r + u\nabla f_r + \frac{u(u+1)}{2!}\nabla^2 f_r + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!}\nabla^3 f_r)du \\ &= h[f_ru + \frac{u^2}{2}\nabla f_r + (\frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{4})\nabla^2 f_r + (\frac{u^4}{24} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{6})\nabla^3 f_r] \Big|_0^1 \\ &= h[f_r + \frac{1}{2}\nabla f_r + (\frac{1}{6} + \frac{1}{4})\nabla^2 f_r + (\frac{1}{24} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6})\nabla^3 f_r - 0] \\ &= h[f_r + \frac{1}{2}\nabla f_r + \frac{5}{12}\nabla^2 f_r + \frac{9}{24}\nabla^3 f_r] \\ &= h[f_r + \frac{1}{2}\nabla f_r + \frac{5}{12}\nabla^2 f_r + \frac{3}{8}\nabla^3 f_r]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Selanjutnya definisikan

$$\nabla^k f_r = \nabla^{k-1} f_r - \nabla^{k-1} f_{r-1}; \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\text{Untuk } k = 1, \quad \nabla f_r = f_r - f_{r-1}. \quad (2.8)$$

$$\text{Untuk } k = 2, \quad \nabla^2 f_r = \nabla f_r - \nabla f_{r-1} = f_r - 2f_{r-1} + f_{r-2}. \quad (2.9)$$

$$\text{Untuk } k = 3, \quad \nabla^3 f_r = \nabla^2 f_r - \nabla^2 f_{r-1} = f_r - 3f_{r-1} + 3f_{r-2} - f_{r-3}. \quad (2.10)$$

Substitusikan persamaan (2.8), (2.9) dan (2.10) ke dalam persamaan (2.7), sehingga dapat dinyatakan

$$\begin{aligned} \int_{x_r}^{x_{r+1}} p_3(x)dx &= h[f_r + \frac{1}{2}\nabla f_r + \frac{5}{12}\nabla^2 f_r + \frac{3}{8}\nabla^3 f_r] \\ &= h[f_r + \frac{1}{2}(f_r - f_{r-1}) + \frac{5}{12}(f_r - 2f_{r-1} + f_{r-2}) + \\ &\quad \frac{3}{8}(f_r - 3f_{r-1} + 3f_{r-2} - f_{r-3})] \\ &= h[f_r + \frac{1}{2}f_r - \frac{1}{2}f_{r-1} + \frac{5}{12}f_r - \frac{10}{12}f_{r-1} + \frac{5}{12}f_{r-2} + \\ &\quad \frac{3}{8}f_r - \frac{9}{8}f_{r-1} + \frac{9}{8}f_{r-2} - \frac{3}{8}f_{r-3}] \\ &= h[\frac{55}{24}f_r - \frac{59}{24}f_{r-1} + \frac{37}{24}f_{r-2} - \frac{3}{8}f_{r-3}] \\ &= h[\frac{55}{24}f_r - \frac{59}{24}f_{r-1} + \frac{37}{24}f_{r-2} - \frac{9}{24}f_{r-3}] \\ &= \frac{h}{24}(55f_r - 59f_{r-1} + 37f_{r-2} - 9f_{r-3}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Substitusikan persamaan (2.11) ke dalam persamaan (2.3), maka diperoleh rumus

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(55f_r - 59f_{r-1} + 37f_{r-2} - 9f_{r-3}), \quad (2.12)$$

dan dikatakan metode *Adams-Bashforth* orde empat (persamaan prediktor).

2.2. Metode Adams-Moulton

Metode *Adams-Moulton* dinyatakan sebagai polinomial $\bar{p}(x)$ pada persamaan (2.3) merupakan polinomial interpolasi beda mundur Newton berderajat tiga yang menginterpolasi $f(x, y(x))$ pada titik $x_{r+1}, x_r, x_{r-1}, x_{r-2}$, maka hampiran fungsi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$p_3(x) = f_{r+1} + u \nabla f_{r+1} + \frac{u(u+1)}{2!} \nabla^2 f_{r+1} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!} \nabla^3 f_{r+1}, \quad (2.13)$$

dengan

$$u = \frac{x - x_{r+1}}{h} \quad (2.14)$$

atau

$$x = x_{r+1} + hu. \quad (2.15)$$

Jika $x = x_r$ dan $x = x_{r+1}$ masing-masing disubstitusikan ke dalam persamaan (2.14), maka diperoleh $-1 \leq u \leq 0$. Jika persamaan (2.15) diturunkan terhadap variabel u , maka diperoleh

$$dx = hdu,$$

sehingga

$$\begin{aligned} \int_{x_r}^{x_{r+1}} \bar{p}_3(x) dx &= \int_{x_r}^{x_{r+1}} \bar{p}_3(x) hdu \\ &= h \int_{-1}^0 (f_{r+1} + u \nabla f_{r+1} + \frac{u(u+1)}{2!} \nabla^2 f_{r+1} + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!} \nabla^3 f_{r+1}) du \\ &= h [f_{r+1}u + \frac{u^2}{2} \nabla f_{r+1} + (\frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{4}) \nabla^2 f_{r+1} + (\frac{u^4}{24} + \frac{u^3}{6} + \frac{u^2}{6}) \nabla^3 f_{r+1}] \Big|_{-1}^0 \\ &= h [0 - (-f_{r+1} + \frac{1}{2} \nabla f_{r+1} + (-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}) \nabla^2 f_{r+1} + (\frac{1}{24} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}) \nabla^3 f_{r+1})] \\ &= h (f_{r+1} - \frac{12}{24} \nabla f_{r+1} - \frac{2}{24} \nabla^2 f_{r+1} - \frac{1}{24} \nabla^3 f_{r+1}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Selanjutnya definisikan

$$\nabla^k f_{r+1} = \nabla^{k-1} f_{r+1} - \nabla^{k-1} f_r; \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\text{Untuk } k = 1, \quad \nabla f_{r+1} = f_{r+1} - f_r. \quad (2.17)$$

$$\text{Untuk } k = 2, \quad \nabla^2 f_{r+1} = \nabla f_{r+1} - \nabla f_r = f_{r+1} - 2f_r + f_{r-1}. \quad (2.18)$$

$$\text{Untuk } k = 3, \quad \nabla^3 f_{r+1} = \nabla^2 f_{r+1} - \nabla^2 f_r = f_{r+1} - 3f_r + 3f_{r-1} - f_{r-2}. \quad (2.19)$$

Substitusikan persamaan (2.17), (2.18) dan (2.19) ke dalam persamaan (2.16), sehingga dapat dinyatakan bahwa

$$\begin{aligned}
 \int_{x_r}^{x_{r+1}} \bar{p}_3(x) dx &= h[f_{r+1} - \frac{12}{24}\nabla f_{r+1} - \frac{2}{24}\nabla^2 f_{r+1} - \frac{1}{24}\nabla^3 f_{r+1}] \\
 \int_{x_r}^{x_{r+1}} \bar{p}_3(x) dx &= h[f_{r+1} - \frac{12}{24}(f_{r+1} - f_r) - \frac{2}{24}(f_{r+1} - 2f_r + f_{r-1}) \\
 &\quad - \frac{1}{24}(f_{r+1} - 3f_r + 3f_{r-1} - f_{r-2})] \\
 &= h[\frac{9}{24}f_{r+1} + \frac{19}{24}f_r - \frac{5}{24}f_{r-1} + \frac{1}{24}f_{r-2}] \\
 &= \frac{h}{24}(9f_{r+1} + 19f_r - 5f_{r-1} + f_{r-2}). \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

Substitusikan persamaan (2.20) ke dalam persamaan (2.3), maka diperoleh rumus

$$y_{r+1} = y_r + \frac{h}{24}(9f_{r+1} + 19f_r - 5f_{r-1} + f_{r-2}), \tag{2.21}$$

dan dikatakan metode *Adams-Moulton* orde empat (persamaan korektor).

3. Kesimpulan

Persamaan diferensial linier homogen orde tiga koefisien konstan dapat diselesaikan menggunakan metode *Runge-Kutta* orde empat untuk menentukan nilai pendekatan y_1, y_2 , dan nilai y_3 , selanjutnya ditentukan nilai pendekatan $y_4, y_5, \dots, y_{10}$ menggunakan metode *Adams-Bashforth* orde empat dan dikoreksi menggunakan metode *Adams-Moulton* orde empat, sehingga menghasilkan nilai pendekatan yang mendekati nilai sebenarnya.

Daftar Pustaka

- [1] Finizio, Ladas dan Widiarti, S. 1998. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Edisi ke-2. Erlangga, Jakarta.
- [2] Kartono. 1994. *Penuntun Belajar Persamaan Diferensial*. Andi Offset, Yogyakarta
- [3] Mathews, H.J. and Fink, D.K. 2004. *Numerical Methods Using Matlab*. 4th edition. Prentice-Hall Inc, New Jersey
- [4] Munir, R. 2003. *Metode Numerik*. Edisi ke-5. Informatika. Bandung
- [5] Rao, S.G. 2006. *Numerical Analysis*. New Age Internasional. New Delhi
- [6] Ross, L.S. 1974. *Differential Equations*. John Wiley and Sons, New York