FAKTORISASI LDU PADA MATRIKS NONPOSITIF TOTAL NONSINGULAR

YULIA GUSTINA

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : yulia.gustina6@gmail.com*

Abstrak. Suatu matriks $A = (a_{ij})$ berukuran $n \times n$ dikatakan nonpositif total (negatif total) jika setiap minornya nonpositif (negatif). Pada artikel ini, dipelajari sifat dari matriks nonpositif total dan kasus karakterisasi dari matriks nonpositif total nonsingular A dengan $a_{11} < 0$ dalam bentuk faktorisasi LDU dimana $L(U)$ adalah matriks segitiga bawah (atas) unit dan D adalah matriks diagonal.

Kata Kunci: Matriks nonsingular, matriks nonpositif total, faktorisasi LDU

1. Pendahuluan

Beberapa tipe matriks memiliki peranan penting dalam cabang ilmu matematika. Salah satu kasus adalah matriks positif total, yang mana matriks ini dapat diaplikasikan secara luas, misalnya pada teori aproksimasi, matematika numerik, statistika, ekonomi, dan komputer untuk desain geometri [3].

Matriks nonpositif total (TNP) dikarakterisasikan dengan cara faktorisasi matriks. Salah satu cara memfaktorisasikan matriks adalah dengan faktorisasi LDU , yaitu perkalian matriks segitiga bawah, segitiga atas, dan matriks diagonal.

Berdasarkan [1], diberikan $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, maka $Q_{k,n}$ merupakan notasi dari himpunan semua barisan naik dari bilangan bulat dengan panjang k yang dipilih dari n pertama bilangan bulat positif $\langle n \rangle = \{1, 2, \dots, n\}$. Jika A adalah suatu matriks $n \times n$ dan $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k) \in Q_{k,n}$, maka $A[\alpha|\beta]$ merupakan notasi submatriks dari A yang diperoleh dari baris $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ dan kolom $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$. Jika $\alpha = \beta$, maka submatriks $A[\alpha|\alpha]$ dinamakan submatriks *principal*, disingkat $A[\alpha]$. Submatriks *principal* $r \times r$ dari suatu matriks $n \times n$ yang diperoleh dengan menghapus baris dan kolom $n - r$ terakhir disebut submatriks *leading principal*.

Pada artikel ini akan dijelaskan kembali mengenai faktorisasi LDU pada matriks nonpositif total nonsingular.

2. Matriks Nonpositif Total

Suatu matriks dikatakan matriks positif total (*totally positive matrix*) jika setiap minornya tidak negatif dan dikatakan matriks positif total sejati (*strictly totally positive matrix*) jika setiap minornya positif, masing-masing di-singkat TP dan STP.

Demikian juga, jika setiap minor dari suatu matriks tidak positif maka matriks tersebut dikatakan matriks nonpositif total (*totally non-positive matrix*) dan jika semua minornya negatif maka matriks tersebut dikatakan matriks negatif total (*totally negative*), masing-masing disingkat TNP dan TN.

Definisi 2.1. [1] Matriks A dikatakan TP jika $\det(A[\alpha|\beta]) \geq 0$ untuk setiap $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$, dan dikatakan STP jika $\det(A[\alpha|\beta]) > 0$ untuk setiap $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$.

Definisi 2.2. [6] Misal A adalah suatu matriks berukuran $n \times n$, jika $\det(A[\alpha|\beta]) \leq 0$ untuk setiap $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$ dengan $k \in \langle n \rangle$, maka A dikatakan matriks TNP.

3. Karakterisasi Matriks TNP Nonsingular berdasarkan Faktorisasi LDU

Salah satu karakterisasi dari matriks TNP nonsingular berdasarkan faktorisasi LDU dapat dilihat pada teorema berikut.

Teorema 3.1. [3] Misal $A = (a_{ij})$ adalah matriks TNP nonsingular berukuran $n \times n$ dengan $a_{11} < 0$. Maka $A = LDU$ dimana L adalah matriks TP segitiga bawah unit, U adalah matriks TP segitiga atas unit, dan $D = (d_{ij})$ adalah matriks diagonal dengan entri diagonal positif kecuali pada entri d_{11} negatif.

Bukti. Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah suatu matriks TNP nonsingular $n \times n$ dengan $a_{11} < 0$, maka $\det(A) < 0$ dan $\det(A[\alpha|\beta]) \leq 0$ untuk setiap $\alpha, \beta \in Q_{k,n}$. Misalkan $P = (p_{ij})$ adalah suatu matriks permutasi $(1, 2, \dots, n)$ dengan $p_{ij} = \delta_{i, \sigma(j)}$ dimana $\sigma(j) = n - j + 1$, adalah entri pada baris ke- i kolom ke- j dari P , maka P juga merupakan matriks nonsingular. Misalkan $G = PAP$, maka G juga matriks nonsingular karena P dan A adalah matriks nonsingular, yaitu $\det(PAP) \neq 0$.

Misalkan $S = (s_{ij})$ adalah matriks diagonal $n \times n$ dengan $s_{ii} = (-1)^{i-1}$ untuk

$$i = 1, 2, \dots, n, \text{ sehingga } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}, \text{ dan misal } B = SG^{-1}S. \text{ Karena}$$

$\det(A) < 0$ maka $\det(G) < 0$, sehingga $\det(B) < 0$.

Dengan menggunakan Identitas Jacobi pada [1], dan $\alpha = (1, 2, \dots, n-1)$, maka

$$\begin{aligned} \det(B[\alpha]) &= \det(SG^{-1}S[\alpha]), \\ &= \frac{\det(G[\alpha]^c)}{\det(G)}, \\ &= \frac{\det(G[n])}{\det(G)}, \\ &= \frac{a_{11}}{\det(A)}, \\ &> 0. \end{aligned}$$

Misal $C = B + xE_{nn}$, jika dipilih $x > -\frac{1}{a_{11}}$ maka C adalah matriks TP dimana $E_{nn} = (e_{ij})$ adalah matriks unit dengan entri-entrinya 0 kecuali 1 pada e_{nn} . Oleh

karena itu, $C = L'D'U'$ dimana L' adalah matriks segitiga bawah unit, U' adalah matriks segitiga atas unit, dan D' adalah matriks diagonal positif. Karena $a_{11} < 0$, maka

$$\begin{aligned}
B &= C - xE_{nn} \\
&= L'D'U' - xE_{nn} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - x \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \\
&= L'D''U'.
\end{aligned}$$

Karena D' adalah matriks diagonal positif dan $\det(B) < 0$, maka $d_{nn} - x < 0$. Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
A &= PGP, \\
&= P(SB^{-1}S)P \\
&= P(S(L'D''U')^{-1}S)P, \\
&= P(S(U')^{-1}(D'')^{-1}(L')^{-1}S)P, \\
&= P(S(U')^{-1}I(D'')^{-1}I(L')^{-1}S)P, \\
&= P(S(U')^{-1}SS(D'')^{-1}SS(L')^{-1}S)P, \\
&= P(S(U')^{-1}SIS(D'')^{-1}SIS(L')^{-1}S)P, \\
&= P(S(U')^{-1}S)PP(S(D'')^{-1}S)PP(S(L')^{-1}S)P, \\
&= [P(S(U')^{-1}S)P][P(S(D'')^{-1}S)P][P(S(L')^{-1}S)P], \\
&= (PU''P)(PD'''P)(PL''P), \\
&= LDU,
\end{aligned}$$

dimana L adalah matriks TP segitiga bawah unit, U adalah matriks TP segitiga atas unit, dan D adalah matriks diagonal dengan entri-entrinya positif kecuali entri d_{11} negatif. $\square$

4. Sifat Matriks TNP Nonsingular Berdasarkan Minor

Sifat-sifat dari matriks TNP nonsingular berdasarkan minor dari matriks dapat dilihat pada proposisi dan teorema di bawah ini.

Proposisi 4.1. [3] *Jika $A = (a_{ij})$ adalah matriks TNP nonsingular $n \times n$ dengan $a_{11} < 0$, maka $\det(A[1, \alpha]) < 0$ untuk semua $\alpha \subset \{2, 3, \dots, n\}$.*

Bukti. Karena A adalah matriks TNP nonsingular dengan $a_{11} < 0$, dan berdasarkan Teorema 3.1 dan [2] maka minor *leading principal* dari matriks TNP

nonsingular A adalah kurang dari 0, yaitu $\det(A[(1, 2, \dots, k)]) < 0$ untuk $k = 1, 2, \dots, n$. Dengan kata lain $\det(A[1, \alpha]) < 0$ untuk semua $\alpha \in \{2, 3, \dots, n\}$. $\square$

Teorema 4.2. [3] Misal $A = (a_{ij})$ adalah matriks nonsingular berukuran $n \times n$ dengan semua entrinya negatif kecuali untuk entri $a_{nn} = 0$. Maka A adalah matriks TNP jika dan hanya jika untuk setiap $k \in \langle n \rangle$, ketaksamaan berikut berlaku:

$$\det(A[\alpha|(1, 2, \dots, k)]) \leq 0, \forall \alpha \in Q_{k,n} \quad (4.1)$$

$$\det(A[(1, 2, \dots, k)|\beta]) \leq 0, \forall \beta \in Q_{k,n} \quad (4.2)$$

$$\det(A[(1, 2, \dots, k)]) < 0. \quad (4.3)$$

Bukti. Misal A adalah matriks nonsingular berukuran $n \times n$ dengan semua entrinya negatif kecuali untuk entri $a_{nn} = 0$.

($\Leftarrow$) Misal ketaksamaan (4.1), (4.2), dan (4.3) berlaku, akan ditunjukkan A adalah TNP.

Dari ketaksamaan (4.3) diperoleh submatriks *leading principal* A nonsingular, sehingga berdasarkan [2] diperoleh $A = LU$. Karena $A = LU$, maka A dapat difaktorkan menjadi $A = LDU$, yaitu suatu faktorisasi LDU dari A , dimana D adalah matriks diagonal dengan entri-entri diagonalnya $(-d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ dengan $d_{ii} > 0$, untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Oleh karena itu dan dari ketaksamaan (4.1), diperoleh

$$\begin{aligned} \det(A[\alpha|(1, 2, \dots, k)]) &= \det((LDU)[\alpha|(1, 2, \dots, k)]) \\ &= \det(L[\alpha|(1, 2, \dots, k)]) \det(D[\alpha|(1, 2, \dots, k)]) \\ &\quad \det(U[\alpha|(1, 2, \dots, k)]) \\ &= \det(L[\alpha|(1, 2, \dots, k)]) (-d_{11}) d_{22} \cdots d_{kk} \\ &\quad \det(U[\alpha|(1, 2, \dots, k)]) \\ &\leq 0, \forall \alpha \in Q_{k,n}, \end{aligned}$$

sehingga, $\det(L[\alpha|(1, 2, \dots, k)]) \geq 0$ dan $\det(U[\alpha|(1, 2, \dots, k)]) \geq 0$ yang mengakibatkan L dan U adalah matriks TP. Akibatnya matriks nonsingular A adalah TNP.

($\Rightarrow$) Misal A adalah TNP, akan ditunjukkan ketaksamaan (4.1), (4.2), dan (4.3) terpenuhi.

Ketaksamaan (4.1) dan (4.2) terpenuhi berdasarkan Definisi 2.2 dan ketaksamaan (4.3), diberikan pada Proposisi 4.1. $\square$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Yanita, Ibu Nova Noliza Bakar, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Jenizon dan Ibu Dr. Lyra Yulianti yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Ando, T., (1987), Totally Positive Matrices, *Linear Algebra Appl.* **90** : pp. 165–219.

- [2] Anton, Howard dan Chris Rorres. 2014. *Elementary Linear Algebra, Ninth edition*. Wiley. Canada.
- [3] Canto, R, P. Koev, B. Ricarte, dan Ana M. U., (2008), *LDU* Factorization of Nonsingular Totally Nonpositive Matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **30** (2) : pp. 777 – 782
- [4] Falat, S. M. dan P. Van Den Driesche, (2000), On Matrices with All Minors Negative, *Electronic J. Linear Algebra*, **7** : 92 – 99
- [5] Gasca, M dan J. M. Pena., (1996), On Factorizations of Totally Positive Matrices, in *Total Positivity and Its Application*, M. Gasca and C. A. Miccheli, eds., Kluwe Academic Publisher, Dordrecht, The Netherlands, pp. 109 – 130
- [6] Huang, Rong dan Delin Chu. (2010), Total Nonpositivity of Nonsingular Matrices, *Linear Algebra and Its Application*. **432** : 2931 – 2941.
- [7] Pena J. M., (2003), On Nonsingular Sign Regular Matrices, *Linear Algebra and Its Applications*, **359** : pp. 91 – 100
- [8] Piziak, R. dan P. L. Odell. 2007. *Matrix Theory From Generalized Inverses to Jordan Form*. Chapman Hall/CRC. Canada.