Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **2** Hal. 38 – 44
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

PELABELAN TOTAL (a, d)-SISI ANTIAJAIB SUPER PADA SUBDIVISI GRAF BINTANG

RUSMANSYAH, SYAFRUDDIN
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email: ruzzc00l@gmail.com

Abstrak. Suatu fungsi bijeksi $f : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, p+q\}$ dikatakan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada graf G jika himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G yang dinotasikan dengan $W = \{w(xy)|w(wx) = f(x) + f(xy) + f(y), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W = \{a, a + d, a + 2d, \cdots, a + (q - 1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$. Suatu pelabelan total (a, d) sisi anti-ajaib dari graf G dikatakan super apabila $f(V) = \{1, 2, \cdots, p\}$. Pada paper ini dikaji kembali makalah [5] yang membahas tentang pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib super pada subdivisi graf bintang yang dinyatakan dengan $T(n, n+2, n+5, 2n+7, n_5, \cdots, n_r)$, dimana $n \equiv 1 \ mod \ 2$, $n_m = 2^{m-3}(n+3)+1$ dan $5 \leq m \leq r$.

Kata Kunci: Pelabelan total sisi antiajaib,graf bintang, subdivisi graf bintang

1. Pendahuluan

Suatu pelabelan dari graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan bijektif dari $V \cup E$ ke himpunan bilangan asli. Apabila daerah asal dari pemetaan hanya himpunan titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik. Apabila daerah asalnya hanya himpunan sisi, maka pelabelan disebut pelabelan sisi. Apabila daerah asal merupakan gabungan dari himpunan titik dan sisi, maka disebut pelabelan total.

Jumlah label yang terkait dengan elemen graf disebut dengan bobot. Misal terdapat sisi $e = xy$ di suatu graf G. Maka *bobot sisi* e adalah jumlah label sisi e dan label titik x dan y. Misal terdapat titik x di suatu graf G, maka bobot titik x adalah jumlah label titik x dan label semua sisi yang terkait dengan titik x. Graf yang memiliki bobot sisi atau bobot titik yang sama disebut graf dengan *pelabelan ajaib*. Graf yang memiliki bobot sisi atau bobot titik yang berbeda disebut graf dengan pelabelan antiajaib.

Berikut adalah beberapa jenis pelabelan antiajaib untuk suatu graf $G = (V, E)$ dengan $|V(G)| = p$ dan $|E(G)| = q$.

(1) Pelabelan sisi (a, d)-titik antiajaib.
Graf G dikatakan mempunyai pelabelan sisi (a, d)-titik antiajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0, d \geq 0$ dan $f_1 : E(G) \to \{1, 2, \cdots, q\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot titik dari semua titik di G, yang dinotasikan dengan $W_1 = \{w(x)|w(x) = \sum f_1(xy), xy \in E(G)\}$ dan xy merupakan sisi terkait pada titik x, dapat ditulis sebagai $W_1 = \{a, a + d, a + 2d, \cdots, a + (p - 1)d\}$.

(2) Pelabelan titik (a, d)-sisi antiajaib.
Graf G dikatakan mempunyai pelabelan titik (a, d)-sisi antiajaib jika terdapat bilangan bulat $a > 0, d \geq 0$ dan $f_2 : V(G) \to \{1, 2, \cdots, p\}$, sedemikian sehingga himpunan bobot sisi dari semua sisi di G, yang dinotasikan dengan $W_2 = \{w(xy)|w(xy) = f_2(x) + f_2(y), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W_2 = \{a, a + d, a + 2d, \cdots, a + (q - 1)d\}$.

(3) Pelabelan total (a, d)-titik antiajaib.
Suatu fungsi bijeksi $f_3 : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, p+q\}$ dikatakan mempunyai pelabelan total (a, d)-titik anti ajaib pada graf (G) jika himpunan bobot titik untuk semua titik di G yang dinotasikan dengan $W_3 = \{w(x)|w(x) = f_3(x) + \sum f_3(xy), xy \in E(G)\}$ dan xy merupakan sisi terkait pada titik x, dapat ditulis sebagai $W_3 = \{a, a + d, a + 2d, \cdots, a + (p - 1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

(4) Pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib.
Suatu fungsi bijeksi $f_4 : V(G) \cup E(G) \to \{1, 2, \cdots, p + q\}$ dikatakan pelabelan total (a, d)-sisi antiajaib pada graf G jika himpunan bobot sisi untuk semua sisi di G yang dinotasikan dengan $W_4 = \{w(xy)|w(wx) = f_4(x) + f_4(xy) + f_4(y), xy \in E(G)\}$, dapat ditulis sebagai $W_4 = \{a, a+d, a+2d, \cdots, a+(q-1)d\}$ untuk suatu $a > 0$ dan $d \geq 0$.

Suatu pelabelan total (a, d) sisi anti-ajaib dari graf G dikatakan super apabila $f(V) = \{1, 2, \cdots, p\}$.

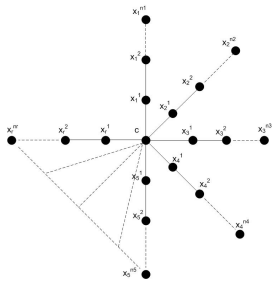
Graf bintang didefinisikan sebagai graf pohon dengan $n + 1$ titik yang memiliki satu titik pusat c berderajat n $(d(c) = n)$ dan n titik lainnya berderajat 1, $(1 = d(v_1) = d(v_2) = \cdots = d(v_n) = 1)$, titik c saling bertetangga dengan n titik lainnya. Graf bintang dilambangkan dengan $K_{1,n}$.

2. Pelabelan Total (a, d)-Sisi Pada Subdivisi Graf Bintang

Misalkan terdapat suatu graf bintang $K_{1,r}$ dan $n_i \geq 1, 1 \leq i \leq r$, $r \geq 2$. Suatu subdivisi graf bintang $T(n_1, n_2, \cdots, n_r)$ adalah graf pohon yang didapatkan dengan memberikan $n_i - 1$ titik ke setiap sisi ke-i dari graf bintang $K_{1,r}$. Definisikan $V(G) = \{c\} \cup \{x_i^{l_i}|1 \leq i \leq r; 1 \leq l_i \leq n_i\}$ dan $E(G) = \{cx_i^1|1 \leq i \leq r\} \cup \{x_i^{l_i}x_i^{l_i+1}|1 \leq i \leq r; 1 \leq l_i \leq n_{i-1}\}$ untuk $G \cong T(n_1, n_2, \cdots, n_r)$. Dapat dilihat bahwa $p = |V(G)| = \sum_{i=1}^{r} n_i + 1$ dan $q = |E(G)| = \sum_{i=1}^{r} n_i$.

Teorema 2.1. [5] *Misalkan a_1 dan a_2 dinotasikan sebagai bobot sisi terkecil pada pelabelan total (a, d) sisi antiajaib super dan untuk $r \geq 5$ dan $n \equiv 1 \bmod 2$. Maka $G \cong T(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, \cdots, n_r)$ mempunyai pelabelan total $(a_1, 0)$-sisi antiajaib super dengan $a_1 = p + q + s$ dan pelabelan total $(a_2, 2)$-sisi antiajaib super dengan $a_2 = p + s + 1$, dimana $p = |V(G)|$, $q = |E(G)|$, $s = \frac{5n+21}{2} + \sum_{m=5}^{r} [2^{m-4}(n + 3) + 1]$, $n_1 = n, n_2 = n + 2, n_3 = n + 5, n_4 = 2n + 7$ dan $n_m = 2^{m-3}(n + 3) + 1$ untuk $5 \leq m \leq r$.*

Bukti. Jika $p = |V(G)|$ dan $q = |E(G)|$ maka $p = (5n+15) + \sum_{m=5}^{r} [2^{m-3}(n+3)+1]$



Gambar 1. Subdivisi Graf Bintang $T(n_1, n_2, n_3, \cdots, n_r)$

dan $q = p - 1$. Misalkan pelabelan menggunakan $1 \leq l_i \leq n_i$ dan $1 \leq i \leq r$. Definisikan $\lambda : V(G) \to \{1, 2, 3, \cdots, p\}$.

Akan dikonstruksikan pelabelan titik $(a, 1)$-sisi antiajaib sebagai berikut. Untuk label titik pusat didefinisikan sebagai berikut:

$$\lambda(c) = (3n + 9) + \sum_{m=5}^{r} [2^{m-4}(n + 3) + 1].$$

Sementara untuk label titik-titik lainnya didefinisikan sebagai berikut.

Kasus 1. $l_i \equiv 1 \ mod \ 2$.

Untuk $1 \leq i \leq 2$,

$$\lambda(u) = \begin{cases} \frac{n+2-l_1}{2}, \text{ untuk } u = x_1^{l_1} \\ \frac{n+4+l_2}{2}, \text{ untuk } u = x_2^{l_2} \end{cases}$$

Untuk $i = 3$,

$$\lambda(u) = \begin{cases} \frac{n+3}{2}, & \text{untuk } u = x_3^1 \\ \frac{3n+12-l_3}{2}, & \text{untuk } u = x_3^{l_3} \end{cases}$$

Untuk $i = 4$,

$$\lambda(u) = \left\{ \frac{5n+18-l_4}{2}, \text{ untuk } u = x_4^{l_4} \right.$$

Untuk $5 \leq i \leq r$,

$$\lambda(x_i^{l_i}) = \frac{5n+17}{2} + \sum_{m=5}^{i} [2^{m-4}(n + 3) + 1] - \frac{l_i - 1}{2}.$$

Kasus 2. $l_i \equiv 0 \ mod \ 2$ dan $\alpha = \frac{5n+17}{2} + \sum_{m=5}^{r} [2^{m-4}(n + 3) + 1]$.

Untuk $i = 1, 2, 3, 4$,

$$\lambda(u) = \begin{cases} (\alpha + \frac{n-1}{2}) - \frac{l_1-2}{2}, & \text{untuk } u = x_1^{l_1} \\ (\alpha + \frac{n+3}{2}) + \frac{l_2-2}{2}, & \text{untuk } u = x_2^{l_2} \\ (\alpha + \frac{3n+7}{2}) - \frac{l_3-2}{2}, & \text{untuk } u = x_3^{l_3} \\ (\alpha + \frac{5n+13}{2}) - \frac{l_4-2}{2}, & \text{untuk } u = x_4^{l_4} \end{cases}$$

dan untuk $5 \leq i \leq r$,

$$\lambda(x_i^{l_i}) = (\alpha + \tfrac{5n+13}{2}) + \sum_{m=5}^{i} [2^{m-4}(n+3)] - \tfrac{l_i-2}{2}.$$

Dari konstruksi pelabelan titik di atas didapatkan himpunan bobot sisi yang membentuk suatu barisan bilangan bulat $\{(\alpha+1)+1, (\alpha+1)+2, \cdots, (\alpha+1)+q\}$ dan $s = (\alpha+1)+1$. Dengan demikian didapatkan pelabelan titik $(s,1)$-sisi antiajaib dan bobot sisi terkecil dari pelabelan titik ini adalah s. Selanjutnya untuk mendapatkan pelabelan total akan diberikan label pada setiap sisi, label sisi dimulai dari $p+1$.

Akan ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan total $(a_1,0)$-sisi antiajaib super dengan cara memberikan label sisi terbesar $p+q$ pada sisi yg memiliki bobot sisi terkecil s pada pelabelan titik $(s,1)$-sisi antiajaib, hingga label sisi terkecil $p+1$ diberikan pada sisi yg memiliki bobot sisi terbesar $s+q-1$. Jadi didapatkan himpunan bobot sisi $\{s+p+q, s+p+q, \cdots, s+p+q\}$ yang menunjukkan pelabelan total $(a_1,0)$-sisi antiajaib super dengan $a_1 = s+p+q$.

Selanjutnya, ditunjukkan bahwa terdapat pelabelan total $(a_2,2)$-sisi antiajaib super dengan cara memberikan label sisi terkecil $p+1$ pada sisi yg memiliki bobot sisi terkecil s pada pelabelan titik $(s,1)$-sisi antiajaib, hingga label sisi terbesar $p+q$ diberikan pada sisi yang memiliki bobot sisi terbesar $s+q-1$. Jadi didapatkan himpunan bobot sisi

$$\{s+p+1, s+p+1+2, s+p+1+4, \cdots, s+p+1+2(q-1)\},$$

yang menunjukkan bawhwa terdapat elabelan total $(a_2,2)$-sisi antiajaib super dengan $a_2 = s+p+1$. □

Teorema 2.2. [5] *Untuk $r \geq 5, n \equiv 1 \bmod 2$ dan $p = |V(G)|$ genap, $G \cong T(n_1,n_2,n_3,n_4,n_5,\cdots,n_r)$ mempunyai pelabelan total $(a,1)$-sisi antiajaib super dengan $a = s+\frac{3p}{2}$, dimana $s = \frac{5n+21}{2} + \sum_{m=5}^{r}[2^{m-4}(n+3)+1]$, $n_1 = n, n_2 = n+2, n_3 = n+5, n_4 = 2n+7$ dan $n_m = 2^{m-3}(n+3)+1$ untuk $5 \leq m \leq r$.*

Bukti. Pengkonstruksian pelabelan titik dilakukan dengan cara yang sama seperti Teorema 2.1. Maka didapatkan pelabelan titik $(s,1)$-sisi antiajaib. Akan dikonstruksikan pelabelan sisi sehingga diperoleh pelabelan total $(a,1)$-sisi antiajaib super pada subdivisi graf bintang $T(n,n+2,n+5,2n+5,n_5,\cdots,n_r)$ tersebut.

Notasikan himpunan bobot sisi dari pelabelan titik sebagai $A = \{a_i, 1 \leq i \leq q\}$, sementara himpunan label sisi dinotasikan sebagai $B = \{b_j, 1 \leq j \leq q\}$, dimana $b_j = p+j$. Kemudian didefinisikan himpunan bobot sisi pelabelan total adalah

$$\begin{aligned} C &= C_1 \cup C_2, \text{ dimana} \\ C_1 &= \{a_{2_i-1} + b_{q-i+1}, 1 \leq i \leq \frac{q+1}{2}\}, \\ C_2 &= \{a_{2j} + b_{\frac{q-1}{2}-j+1}, 1 \leq j \leq \frac{q+1}{2} - 1\}. \end{aligned}$$

Bobot sisi pelabelan total $C_2 = \{a_{2j} + b_{\frac{q-1}{2}-j+1}, 1 \leq j \leq \frac{q+1}{2} - 1\}$ adalah:

$$\{a_2+b_{\frac{q-1}{2}}, a_4+b_{\frac{q-1}{2}-1}, \cdots, a_{q-1}+b_1\} = \{s+1+p+\frac{q-1}{2}, s+2+\frac{q-1}{2}, \cdots, s+(q-1)+p\},$$

dimana

$$\begin{aligned} s+1+p+\frac{q-1}{2} &= s+1+p+\frac{p-2}{2}, \\ &= s+\frac{2p+p-2+2}{2}, \\ &= s+\frac{3p}{2}, \\ s+q-1+p &= s+p-2+p, \\ &= s+2p-2, \\ &= s+\frac{3p}{2}+\frac{q+1}{2}-2. \end{aligned}$$

Dari bobot sisi diatas diperoleh himpunan bobot sisi dari pelabelan total C_2 adalah

$$\{s+\frac{3p}{2}, s+\frac{3p}{2}+1, \cdots, s+\frac{3p}{2}+\frac{q+1}{2}-2\}.$$

Untuk bobot sisi pelabelan total $C_1 = \{a_{2_i-1}+b_{q-i+1}, 1 \leq i \leq \frac{q+1}{2}\}$ adalah:

$$\{a_1+b_q, a_3+b_{q-1}, \cdots, a_q+b_{\frac{q-1}{2}+1}\} = \{s+p+q, s+p+q+1, \cdots, s+(q-1)+p+q-\frac{q+1}{2}+1\},$$

dimana

$$\begin{aligned} s+p+q &= s+2p-1, \\ &= s+\frac{3p}{2}+\frac{q+1}{2}-1. \\ s+(q-1)+p+q-\frac{q+1}{2}+1 &= s+p+2q-\frac{q+1}{2}, \\ &= s+3p-2-\frac{p}{2}, \\ &= s+\frac{3p}{2}+p-2, \\ &= s+\frac{3p}{2}+(q-1). \end{aligned}$$

Himpunan bobot sisi dari pelabelan total C_1 adalah

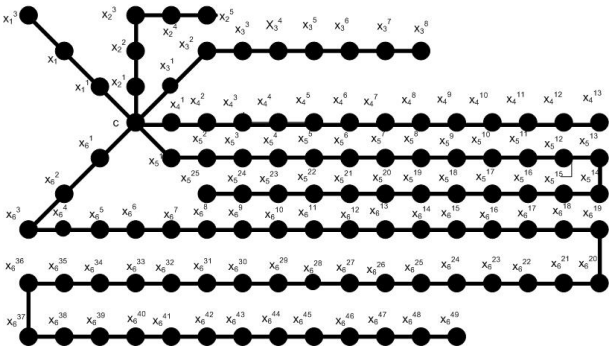
$$\{s+\frac{3p}{2}+\frac{q+1}{2}-1, s+\frac{3p}{2}+\frac{q+1}{2}, \cdots, s+\frac{3p}{2}+(q-1)\}.$$

Dari himpunan bobot sisi C_1 dan C_2 didapatkan himpunan bobot sisi yang membentuk barisan dengan nilai beda $d = 1$, yaitu

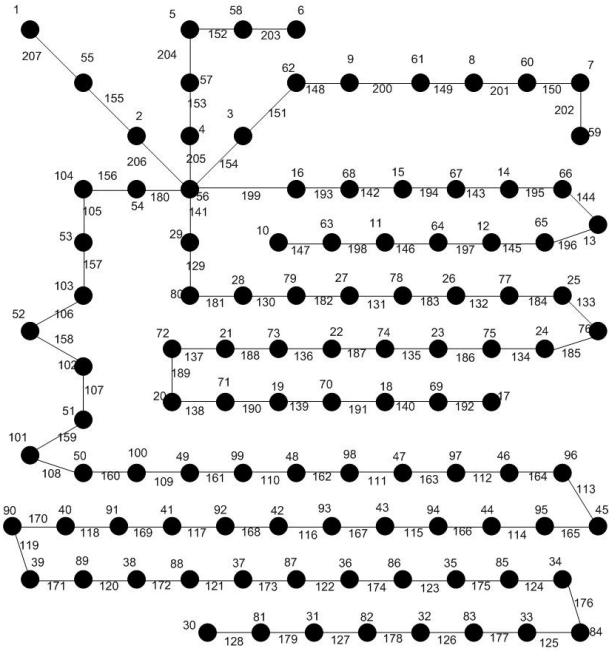
$$\{s+\frac{3p}{2}, s+\frac{3p}{2}+1, \cdots, s+\frac{3p}{2}+\frac{q+1}{2}-2, s+\frac{3p}{2}+\frac{q+1}{2}-1, s+\frac{3p}{2}+\frac{q+1}{2}, \cdots, s+\frac{3p}{2}+(q-1)\}.$$

Dari himpunan bobot sisi diatas dapat ditunjukkan bahwa subdivisi graf bintang $T(n, n+2, n+5, 2n+7, n_5, \cdots, n_r)$ dimana $n \equiv 1(mod 2), n_m = 2^{m-3}(n+3)+1$ dan $5 \leq m \leq r$ memiliki pelabelan total $(a,1)$-sisi antiajaib super dengan $a = s+\frac{3p}{2}$. □

Contoh 2.3. Perhatikan subdivisi graf bintang $T(n, n+2, n+5, 2n+7, n_5, \cdots, n_r)$ dengan $n = 3$ dan $r = 6$ maka $n_1 = 3$, $n_2 = 5$, $n_3 = 8$, $n_4 = 13$, $n_5 = 25$ dan $n_6 = 49$ sehingga diperoleh subdivisi graf bintang $T(3, 5, 8, 13, 25, 49)$ dengan $p = 104$ dan $q = 103$. Pada Gambar 2 diberikan subdivisi graf bintang $T(3, 5, 8, 13, 25, 49)$,



Gambar 2. Subdivisi Graf Bintang $T(3, 5, 8, 13, 25, 49)$



Gambar 3. Pelabelan total $(212, 1)$-sisi antiajaib super subdivisi graf bintang $T(3, 5, 8, 13, 25, 49)$

sementara pada Gambar 2.3 diberikan pelabelan total $(212, 1)$-sisi antiajaib super pada subdivisi graf bintang $T(3, 5, 8, 13, 25, 49)$.

Himpunan bobot sisi dari pelabelan total $(a_3, 1)$-sisi antiajaib super pada subdivisi graf bintang $T(3, 5, 8, 13, 25, 49)$ dapat ditulis sebagai barisan berikut: $\{212, 213, \cdots, 314\}$. Berdasarkan himpunan bobot sisi tersebut diperoleh pelabelan total $(212, 1)$-sisi antiajaib super pada subdivisi graf bintang $T(3, 5, 8, 13, 25, 49)$.

3. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah ditunjukkan kembali bahwa terdapat pelabelan total $(a_1, 0)$ sisi antiajaib super pada subdivisi graf bintang $T(n, n+2, n+5, 2n+7, n_5, \cdots, n_r)$ untuk $n \equiv 1 \ mod \ 2$ dan $n_m = 2^{m-3}(n+3)+1$, dimana $5 \leq m \leq r$ dengan $a_1 = s+p+q$. Selanjutnya, telah ditunjukkan kembali bahwa terdapat pelabelan total $(a_2, 2)$ sisi antiajaib super pada subdivisi graf bintang $T(n, n+2, n+5, 2n+7, n_5, \cdots, n_r)$ untuk $n \equiv 1 \ mod \ 2$ dan $n_m = 2^{m-3}(n+3)+1$, dimana $5 \leq m \leq r$ dengan $a_2 = s+p+1$. Yang terakhir, pelabelan total $(a_3, 1)$ sisi antiajaib super pada subdivisi graf bintang $T(n, n+2, n+5, 2n+7, n_5, \cdots, n_r)$ untuk $n \equiv 1 \ mod \ 2$ dan $n_m = 2^{m-3}(n+3)+1$, dimana $5 \leq m \leq r$ dan p genap dengan $a_3 = s + \frac{3p}{2}$, dimana $p = |V(G)| = \sum_{i=1}^{r} n_i + 1$, $q = |E(G)| = \sum_{i=1}^{r} n_i$ dan $s = \frac{5n+21}{2} + \sum_{m=5}^{r} [2^{m-4}(n+3)+1]$.

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Admi Nazra, Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Dr. Dodi Devianto yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Baca. M, Y.Lin, M.Miller, M.Z. Yousief. 2007. Edge-antimagic graph.*Discrete Mathematics* **307**: 1232 – 1244.

[2] H. Enomoto, A.S. Llado, T. Nakamigawa, G.Ringel. 1998. Super edge-magic.*SUT J. Math* **34**: 105 – 109.

[3] R.M. Figueroa-Centeno, R. Ichishima, F.A. Muntaner-Batle. 2001. The Place of super edge-magic labelings among other classes of labelings, *Discrete Math.* **231**: 153 – 168.

[4] D.B West. *An Introduction to Graph Theory.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1996.

[5] M. Javaid, Sajid Mahboob, Abid Mahboob dan M. Hussain.2014. On (Super) edge-antimagic labeling of subdivided stars. *International Journal of Mathematics and Soft Computing.* **4**(1): 73 – 80.

[6] Morris. D.W, Morris.J. *Proof and Concepts.* P.D. Magnus, New York, 2009.