Jurnal Matematika UNAND
Vol. **1** No. **2** Hal. 1 – 4
ISSN : 2303–291X

HIMPUNAN PEWARNAAN PADA GRAF SEMPURNA

ELZA ZURIAWAN

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Andalas
Kampus UNAND Limau Manis Padang 25163, Indonesia,
elza.zuriawan@gmail.com

Abstrak. Untuk suatu graf terhubung nontrivial G, $c : V(G) \to N$ adalah suatu pewarnaan titik di G, yang mana titik-titik yang saling bertetangga dapat diwarnai dengan warna yang sama. Untuk suatu titik $v \in V(G)$, himpunan warna lingkungan $NC(v)$ adalah himpunan yang berisikan warna dari lingkungan v. Pewarnaan c disebut suatu himpunan pewarnaan jika $NC(u) \neq NC(v)$ untuk setiap pasangan titik u, v yang bertetangga di G. Bilangan minimum dari warna-warna yang dibutuhkan dari suatu pewarnaan c disebut bilangan kromatik himpunan $\chi_s(G)$. Pada makalah ini akan dikaji kembali bahwa setiap graf *k-colorability* himpunan merupakan suatu masalah *NP-complete* dengan suatu transformasi kedalam *k-colorability*, sehingga bilangan kromatik himpunan χ_s dapat ditentukan dalam waktu polinomial. Dari ketiga kelas graf sempurna yang digunakan dalam tulisan ini, yaitu graf *chordal*, graf *split*, dan graf *threshold*, hanya graf *threshold* yang bilangan kromatiknya bernilai sama dengan bilangan kromatik himpunannya. Selanjutnya pada tulisan ini juga telah ditunjukkan bahwa, jika G adalah graf *threshold*, maka bilangan kromatik himpunan $\chi_s(G)$ dapat dihitung secara efisien dalam waktu polinomial.

Kata Kunci: Himpunan pewarnaan, NP-complete, graf sempurna.

1. Pendahuluan

Didefinisikan dalam [2]

$$N_k = \{1, 2, ..., k\}$$

untuk setiap k adalah bilangan bulat positif. Untuk suatu graf terhubung nontrivial G, $c : V(G) \to N_k$ merupakan suatu pewarnaan titik di G dimana titik-titik yang bertetangga boleh diwarnai dengan warna yang sama. Untuk suatu himpunan $S \subseteq V(G)$, didefinisikan himpunan $c(S)$ dari warna-warna di S dengan

$$c(S) = \{c(v) : v \in S\}$$

untuk suatu titik v di G. Misal $N(v)$ merupakan lingkungan dari v, himpunan warna lingkungan $NC(v) = c(N(v))$ adalah himpunan yang berisikan warna dari lingkungan v. Pewarnaan c disebut suatu himpunan pewarnaan, jika $NC(u) \neq NC(v)$ untuk setiap pasangan $u, v \in V(G)$ di G.

Dalam paper ini dibangun *NP-Completeness* dari kajian bilangan kromatik himpunan dan akan dicari kelas dari graf sempurna, yang mana bilangan kromatik himpunan dapat dihitung secara efisien untuk setiap anggota dari kelas tersebut.

2. Himpunan Pewarnaan pada Graf Sempurna

Dalam [1] telah dibuktikan bahwa $\chi_s(G) \leq \chi(G)$ untuk setiap graf G. Salah satu kelas dari graf sempurna adalah graf bipartit, dimana bilangan kromatik himpunan dapat ditentukan secara efisien.

Misalkan graf G dengan $v \in V(G)$ adalah suatu graf *k-colorability* himpunan, dimana $k \in Z^+$. Apakah terdapat suatu pemetaan $c : V \to N_k$ dengan c adalah suatu k-pewarnaan himpunan dari G, dimana $NC(u) \neq NC(v)$?

Teorema berikut mengkaji bahwa *k-colorability* sebagai kasus terbatas dari *k-colorability* himpunan.

Teorema 2.1. *Graf k-colorability himpunan merupakan suatu masalah NP-complete.*

Bukti. Setiap contoh dari graf *k-colorability* himpunan dapat menjadi suatu contoh dari graf *k-colorability* dengan pembatasan bahwa pewarnaan c, yang mana $c : V(G) \to N_k$ itu sendiri merupakan suatu pewarnaan sejati. Pewarnaan c memperlihatkan bahwa *k-pewarnaan* sejati dari suatu contoh (G, k) pada graf *k-colorability* adalah korespondensi satu-satu dengan *k-pewarnaan* himpunan dari G yang memenuhi pembatasan tersebut. Karena setiap graf *k-colorability* himpunan dengan pembatasan adalah merupakan suatu graf *k-colorability*, sedangkan *k-colorability* merupakan suatu masalah NP. Oleh karena itu, graf *k-colorability* himpunan dapat ditransformasi ke dalam graf *k-colorability*, sedemikian sehingga graf *k-colorability* himpunan adalah *NP-complete.* □

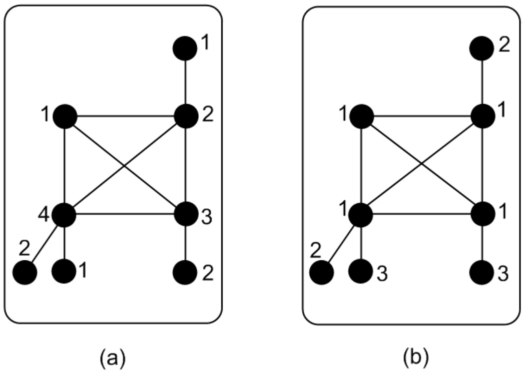
Menentukan bilangan kromatik himpunan $\chi_s(G)$ pada graf sempurna tidak lebih mudah dari pada menentukan bilangan kromatik $\chi(G)$ yang dapat dihitung dalam waktu polinomial untuk setiap kelas pada graf sempurna. Dalam [2] dijelaskan bahwa jika graf G adalah anggota dari suatu kelas pada graf sempurna, dan apabila graf G tersebut bisa menunjukkan bahwa $\chi_s(G) = \chi(G)$ untuk setiap anggota dari kelas tersebut, maka $\chi_s(G)$ dapat dihitung secara efisien untuk setiap graf dalam kelas tersebut dengan menggunakan suatu algoritma untuk menghitung $\chi(G)$.

Dalam hal ini akan digunakan anggota dari dua kelas graf, yaitu graf *chordal* dan graf *split*. Kedua kelas ini saling berhubungan, yang mana setiap graf *split* adalah graf *chordal*.

Graf G pada Gambar 1 adalah suatu graf *split*. Pada Figure 1 (a), terdapat suatu pewarnaan sejati dengan bilangan kromatiknya, $\chi(G) = 4$. Sedangkan pada Gambar Figure 1 (b) terdapat pewarnaan c, $c : V \to N_k$, yang menunjukkan 3-pewarnaan himpunan, dengan bilangan kromatik himpunannya, $\chi_s(G) = 3$. Maka diperoleh bahwa $\chi_s(G) = 3 < 4 = \chi(G)$.

Karena graf *split* tidak memenuhi $\chi_s(G) = \chi(G)$, maka ambil satu contoh kelas dari suatu kelas pada graf sempurna dimana bilangan kromatik himpunan dapat dihitung dalam waktu polinomial dan memenuhi $\chi_s(G) = \chi(G)$ untuk setiap anggota kelas tersebut. Dalam hal ini, akan dicoba dengan menggunakan suatu graf yang masih berhubungan dengan graf *split*, yaitu graf *threshold*.[3]

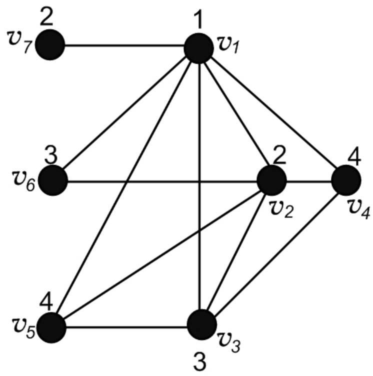
Berikut adalah definisi graf *threshold* yang diberikan oleh Gera [2], Misal $\delta_0 = 0$,



Gambar 1. Graf *split* G dengan $\chi_s(G) = 3 < 4 = \chi(G)$

dan misal $\delta_1 < \delta_2 < ... < \delta_k$ adalah derajat titik positif berbeda di G. Untuk setiap i, dimana $0 \leq i \leq k$, didefinisikan $V_i = \{v \in V : deg(v) = \delta_i\}$. Graf G dikatakan sebagai suatu graf ***threshold*** jika dan hanya jika untuk semua $u \in V_i$ dan $v \in V_j$, $uv \in E$ jika dan hanya jika $i + j > k$. Jika $u \in V_i$, $v \in V_j$, dan $i \leq j$, maka $N(u) - v \subseteq N(v) - u$, dengan persamaan jika dan hanya jika $i = j$.

Pada Gambar 2, dimana δ_i untuk $1 \leq i \leq 6, V_1 = \{v_7\}, V_2 = \{v_6\}, V_3 = \{v_4, v_5\}, V_4 = \{v_3\}, V_5 = \{v_2\}$, dan $V_6 = \{v_1\}$. Pemetaan $c : V(G) \to N_4$ merupakan suatu pewarnaan sejati dan 4-pewarnaan himpunan.



Gambar 2. Graf *threshold* G dengan $\chi_s(G) = 4 = \chi(G)$

Teorema 2.2. *Untuk setiap graf* threshold G*, berlaku* $\chi_s(G) = \chi(G)$.

Bukti. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf *threshold*. Karena $\chi_s(G) \leq \chi(G)$ berlaku untuk sebarang graf, maka cukup ditunjukkan bahwa $\chi_s(G) \geq \chi(G)$. Karena G adalah suatu graf *split*, maka V dapat dipartisi menjadi $V = \{K, S\}$, dimana K suatu himpunan *clique* dan S adalah himpunan bebas. Karena G adalah sempurna, maka $\chi(G) = \omega(G) = |K|$. Asumsikan suatu kontradiksi, misal $|K| = k - 1$, maka terdapat suatu pemetaan c dimana

$$c : V \to N_{k-1}$$

Karena c menggunakan paling sedikit k warna, maka terdapat suatu subset tidak kosong X dari K yang mana untuk setiap titik $v \in K$, $v \in X$ jika dan hanya jika terdapat suatu titik $w \in K - v$ dengan $c(v) = c(w)$. Misal $X = \{x_1, x_2, ..., x_l\}$, dimana $deg(x_1) \leq deg(x_2) \leq ... \leq deg(x_l)$. Maka $2 \leq l \leq k$ dan $|c(K)| \geq k - l + 1$.

Karena $c(K) \subseteq NC(x) \subseteq N_{k-1}$ untuk setiap $x \in X$ dan tidak ada dua titik di X yang mempunyai himpunan warna ketetanggaan yang sama, maka $N(x) \bigcap S \neq N(y) \bigcap S$ untuk setiap dua titik $x, y \in X$. Oleh karena itu, $N(x) - \{y\} \neq N(y) - \{x\}$, artinya tidak ada dua titik pada X yang mempunyai derajat yang sama, selanjutnya diperoleh bahwa jika $i < j$ maka $N(x_i) \bigcap S \subset N(x_j) \bigcap S$. Ini berarti

$$c(K) \subseteq NC(x_1) \subset NC(x_2) \subset ... \subset NC(x_l) \subseteq N_{k-1}$$

Karena $|c(K)| \geq k - l + 1$, maka tidak diperoleh himpunan pewarnaan c. Oleh karena itu, haruslah $\chi_s(G) \geq k = \chi(G)$. $\square$

Daftar Pustaka

[1] Chartrand,G, F. Okamoto, C. Rasmussen, dan P. Zhang :*The Set Chromatic Number of a Graph. Discuss. Math,Graph Theory. To appear.*

[2] Gera, R. dkk. 2009. *Set Coloring in Perfect Graphs.* Mathematica Bohemica. No 1,61-68.

[3] Chvatal, V dan P. Hammer. *Set-packing problems and threshold graphs.* CORR 7321 (1973). University of Waterloo.