Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **4** Hal. 1 – 8
ISSN : 2303–291X

PEMBUKTIAN BENTUK TUTUP RUMUS BEDA MAJU BERDASARKAN DERET TAYLOR

ADE PUTRI, RADHIATUL HUSNA

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : adeputri0712@gmail.com

Abstrak. Pada artikel ini dibahas pembuktian bentuk tutup rumus beda maju berdasarkan deret Taylor untuk menghampiri secara numerik turunan pertama dari fungsi satu variabel. Pembuktian bentuk tutup tersebut menggunakan sifat-sifat determinan matriks Vandermonde dan beberapa manipulasi aljabar.

Kata Kunci: Rumus beda maju, deret Taylor, turunan numerik, determinan matriks Vandermonde

1. Pendahuluan

Turunan numerik digunakan secara luas untuk menentukan laju perubahan suatu data digital yang mana fungsi pembangkitnya secara umum tidak diketahui. Selain itu, juga terdapat fungsi-fungsi tertentu yang tidak dapat diturunkan secara analitik sehingga dibutuhkan metode numerik untuk menentukan hampiran turunannya. Salah satu metode numerik yang paling sering dan mudah digunakan dalam menghitung hampiran turunan suatu fungsi adalah metode beda hingga. Pada metode ini variabel domain suatu fungsi dipartisi atas sejumlah titik dan rumus aproksimasi untuk turunan diperoleh dari ekspansi deret Taylor di satu atau lebih titik partisi [6]. Berdasarkan lokasi titik-titik partisi yang digunakan, metode beda hingga dibagi atas tiga jenis, yaitu beda maju (*forward difference*), beda mundur (*backward difference*), dan beda pusat (*central difference*).

Rumus umum beda hingga untuk turunan ke-m dengan ketelitian orde ke-n dapat dibangkitkan dengan suatu algoritma rekursif, artinya untuk memperoleh rumus turunan ke-m dengan ketelitian orde ke-n, perlu diketahui dulu rumus turunan ke-$(m-1)$ dengan ketelitian orde ke-$(n-1)$. Salah satu algoritma rekursif tersebut dikembangkan oleh Fornberg [3] yang darinya dapat dibuat tabel yang berisi koefisien-koefisien rumus beda maju, mundur dan pusat untuk beberapa tingkatan turunan fungsi dengan beberapa orde ketelitian.

Dalam tataran praktis, algoritma rekursif membutuhkan memori komputasi yang semakin besar untuk tingkatan turunan dan orde ketelitian yang semakin tinggi, karena melibatkan jumlah data (*titik-titik partisi*) yang semakin banyak. Untuk mengatasi hal tersebut, diperlukan bentuk tutup dari rumus beda hingga sehingga koefisien-koefisiennya dapat ditentukan secara langsung tanpa melewati proses perhitungan secara rekursif.

Adapun yang dimaksud dengan bentuk tutup di sini adalah suatu ekspresi matematika yang dapat dihitung dalam sejumlah berhingga operasi. Dalam [5], Khan dkk. memberikan bentuk tutup dari rumus beda hingga yang dikembangkan berdasarkan deret Taylor. Untuk hampiran turunan pertama suatu fungsi $f(x)$ di titik $x = x_0$, bentuk tutup dari rumus beda hingganya diberikan oleh

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{T} \sum_k g_k f_k, \tag{1.1}$$

dimana T menyatakan lebar selang partisi, sedangkan koefisien g_k dan iterator k didefinisikan berdasarkan orde dan jenis beda hingga.

2. Bentuk Tutup Rumus Beda Hingga

Dalam [5] Khan dkk. telah mengembangkan bentuk tutup rumus beda hingga berdasarkan deret Taylor. Untuk hampiran turunan pertama suatu fungsi $f(x)$ di titik $x = x_0$, bentuk tutupnya diberikan oleh

$$f_0' \approx \frac{1}{T} \sum_k g_k f_k, \tag{2.1}$$

dimana T adalah lebar selang partisi sedangkan koefisien g_k dan iterator k didefinisikan berdasarkan orde ketelitian dan jenis beda hingga. Untuk aproksimasi beda maju, iterator k diuraikan atas $k = 0, 1, 2, \cdots, N$, dimana N adalah orde ketelitian, dan koefisien g_k didefinisikan oleh

$$g_k = \begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{j}, & k = 0, \\ \frac{(-1)^{k+1} N!}{k(N-k)!k!}, & k = 1, 2, \cdots, N. \end{cases} \tag{2.2}$$

3. Determinan Matriks Vandermonde

Definisi 3.1. [7] *Matriks V berukuran $M \times N$ yang berbentuk*

$$V_{M\times N} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{N-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_M & \lambda_M^2 & \cdots & \lambda_M^{N-1} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

dimana $\lambda_i \neq \lambda_j$ untuk setiap $i \neq j$ disebut matriks Vandermonde.

Teorema 3.2. [7] *Determinan matriks Vandermonde yang berukuran $N \times N$ diberikan oleh*

$$|V_{N\times N}| = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{N-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{N-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_N^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{\substack{1<i\leq N \\ 1\leq j<N \\ j<i}} (\lambda_i - \lambda_j). \tag{3.2}$$

Akibat 3.3. [7] *Nilai determinan dari matriks Vandermonde $N \times N$ yang secara khusus berbentuk*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{N-1} \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & N^2 & \cdots & N^{N-1} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

diberikan oleh

$$\alpha_N = \prod_{\substack{1<i\leq N \\ 1\leq j<N \\ j<i}} (i-j) = \prod_{i=1}^{N} (N-i)!. \tag{3.4}$$

4. Pembuktian Bentuk Tutup Rumus Maju Berdasarkan Deret Taylor

Pandang kembali deret Taylor untuk $f(x)$ di $x \approx x_0$ yang diberikan oleh

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots \tag{4.1}$$

Jika x dipartisi sebanyak N selang dengan lebar $\Delta x = T$, maka diperoleh titik-titik partisi

$$x_k = x_0 + kT, \ \ k = 0, 1, \cdots, N.$$

Dengan demikian deret Taylor (4.1) pada saat $x = x_k$ adalah

$$f_k - f_0 = (kT)f_0^{(1)} + \frac{(kT)^2}{2!}f_0^{(2)} + \frac{(kT)^3}{3!}f_0^{(3)} + \cdots \tag{4.2}$$

dimana $f_0 = f(x_0)$, $f_k = f(x_k)$ dan $f_0^{(m)} = f^{(m)}(x_0)$ dengan m menyatakan turunan ke-m.

Persamaan (4.2) yang dipotong sampai suku ke-N dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$\mathbf{f} \approx A\mathbf{d},$$

dimana

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} f_0^{(1)} & f_0^{(2)} & f_0^{(3)} & \cdots & f_0^{(N)} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 - f_0 & f_2 - f_0 & \cdots & f_N - f_0 \end{bmatrix}^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} T & T^2/2! & \cdots & T^N/N! \\ 2T & (2T)^2/2! & \cdots & (2T)^N/N! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ NT & (NT)^2/2! & \cdots & (NT)^N/N! \end{bmatrix}.$$

Dengan menggunakan aturan Cramer, nilai dari $f_0^{(1)}$ diberikan oleh

$$f_0^{(1)} \approx \frac{|A_f|}{|A|}, \tag{4.3}$$

dimana A_f diperoleh dengan mengganti kolom pertama matriks A dengan vektor kolom $\mathbf{f}$.

Berdasarkan sifat determinan matriks, persamaan (4.3) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} f_0^{(1)} &\approx \frac{(T^2)(T^3)\cdots(T^N)}{(T)(T^2)\cdots(T^N)} \frac{|A_f|_{T=1}}{|A|_{T=1}} \\ &= \frac{1}{T} \frac{|A_f|_{T=1}}{|A|_{T=1}}. \end{aligned}$$

Selanjutnya dengan mengeluarkan faktor kelipatan dari setiap baris pada $|A|_{T=1}$, diperoleh

$$|A|_{T=1} = (2)(3)\cdots(N)|A_b|_{T=1}, \tag{4.4}$$

dimana

$$|A_b|_{T=1} = \begin{vmatrix} 1 & 1/2! & \cdots & 1/N! \\ 1 & 2/2! & \cdots & N/N! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N/2! & \cdots & N^{N-1}/N! \end{vmatrix}.$$

Kemudian dengan mengeluarkan faktor kelipatan dari setiap kolom pada $|A_b|_{T=1}$, diperoleh

$$|A_b|_{T=1} = \frac{1}{(2!)(3!)\cdots(N!)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & \cdots & N^{N-1} \end{vmatrix}. \tag{4.5}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.5), persamaan (4.4) menjadi

$$|A|_{T=1} = \frac{(2)(3)\cdots(N)}{(2!)(3!)\cdots(N!)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & \cdots & N^{N-1} \end{vmatrix}. \tag{4.6}$$

Perhatikan bahwa determinan matriks yang muncul pada persamaan (4.6) merupakan determinan matriks Vandermonde. Berdasarkan Akibat 3.3, maka berlaku

$$|A|_{T=1} = \frac{(2)(3)\cdots(N)}{(2!)(3!)\cdots(N!)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & \cdots & N^{N-1} \end{vmatrix} = \frac{\alpha_N}{(2!)(3!)\cdots((N-1)!)} = 1,$$

dimana α_N diberikan oleh persamaan (3.4). Dengan demikian persamaan (4.3) menjadi

$$f_0^{(1)} \approx \frac{1}{T}|A_f|_{T=1},$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$f_0^{(1)} \approx \frac{1}{T}\left(\sum_{k=1}^{N} g_k f_k - \sum_{k=1}^{N} g_k f_0\right), \tag{4.7}$$

dimana g_k untuk $k = 1, 2, \cdots, N$ adalah kofaktor dari $[A_f]_{T=1}$ yang berkorespondasi dengan elemen ke-k dari kolom pertama, yaitu diberikan oleh

$$g_k = (-1)^{k+1}\begin{vmatrix} 1/2! & 1/3! & \cdots & 1/N! \\ 2^2/2! & 2^3/3! & \cdots & 2^N/N! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k-1)^2/2! & (k-1)^3/3! & \cdots & (k-1)^N/N! \\ (k+1)^2/2! & (k+1)^3/3! & \cdots & (k+1)^N/N! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N^2/2! & N^3/3! & \cdots & N^N/N! \end{vmatrix}.$$

Dengan mendefinisikan

$$g_0 = -\sum_{k=1}^{N} g_k, \tag{4.8}$$

maka persamaan (4.7) dapat ditulis

$$f_0^{(1)} \approx \frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N} g_k f_k.$$

Dengan mengeluarkan faktor kelipatan dari setiap baris pada g_k, diperoleh

$$g_k = (-1)^{k+1}(2^2)(3^2)\cdots(N^2)\tilde{g}_k, \tag{4.9}$$

dimana

$$\tilde{g}_k = \begin{vmatrix} 1/2! & 1/3! & \cdots & 1/N! \\ 1/2! & 2/3! & \cdots & 2^{N-2}/N! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2! & (k-1)/3! & \cdots & (k-1)^{N-2}/N! \\ 1/2! & (k+1)/3! & \cdots & (k+1)^{N-2}/N! \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/2! & N/3! & \cdots & N^{N-2}/N! \end{vmatrix}.$$

Selanjutnya dengan mengeluarkan faktor kelipatan dari setiap kolom pada $\tilde{g}_k$, diperoleh

$$\tilde{g}_k = \frac{1}{(2!)(3!)\cdots(N!)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (k-1) & \cdots & (k-1)^{N-2} \\ 1 & (k+1) & \cdots & (k+1)^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & \cdots & N^{N-2} \end{vmatrix}. \tag{4.10}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.10), maka persamaan (4.9) menjadi

$$g_k = (-1)^{k+1} \tfrac{(2^2)(3^2)\cdots(N^2)}{(2!)(3!)\cdots(N!)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (k-1) & \cdots & (k-1)^{N-2} \\ 1 & (k+1) & \cdots & (k+1)^{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & N & \cdots & N^{N-2} \end{vmatrix}. \tag{4.11}$$

Perhatikan bahwa determinan matriks yang muncul pada persamaan (4.11) sama dengan determinan matriks $(N-1) \times (N-1)$ pada matriks Vandermonde. Jadi

$$\begin{aligned} g_k &= (-1)^{k+1} \frac{(2^2)(3^2)\cdots(N^2)}{(k^2)(2!)(3!)\cdots(N!)} \frac{(N-1)!(N-2)!\cdots(3)!(2)!(1)!}{(k-1)!(N-k)!} \\ &= (-1)^{k+1} \frac{(2)(3)\cdots(N).(2)(3)\cdots(N)}{kk!(N-k)!N!} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}N!}{k(N-k)!k!}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

dengan $k = 1, 2, \cdots, N$.

Selanjutnya dari persamaan (4.8) diperoleh

$$g_0 = -\sum_{k=1}^{N} g_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k N!}{k(N-k)!k!}. \tag{4.13}$$

Pandang terlebih dahulu fungsi

$$f(x) = \tfrac{(1-x)^N - 1}{x},$$

yang dapat diuraikan dengan menggunakan ekspansi binomial dari $(1-x)^N$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned} (1-x)^N &= \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} 1^{N-k}(-x)^k \\ &= \binom{N}{1}(-x) + \binom{N}{2}(-x)^2 + \cdots + \binom{N}{N}(-x)^N. \end{aligned}$$

Dari uraian di atas diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(\left(1+\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k N!}{k(N-k)!}x^k\right)-1\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k N!}{k!(N-k)!}x^{k-1}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= \int_0^1 \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k N!}{k!(N-k)!}x^{k-1}dx \\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k N!}{k(N-k)!k!}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Dari persamaan (4.13) dan (4.14) dapat ditulis

$$g_0 = \int_0^1 f(x)dx. \tag{4.15}$$

Fungsi $f(x)$ juga dapat diuraikan dengan manipulasi aljabar sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}((1-x)-1)((1-x)^{N-1}+(1-x)^{N-2}+\cdots+1) \\ &= -\sum_{k=1}^{N}(1-x)^{k-1}, \end{aligned}$$

yang dapat digunakan pada persamaan (4.15) untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} g_0 &= \int_0^1 f(x)dx \\ &= -\int_0^1 \sum_{k=1}^{N}(1-x)^{k-1}dx \\ &= -\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N}\right) \\ &= -\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Dengan demikian, dari persamaan (4.12) dan (4.16) diperoleh

$$g_k = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{j} & k=0, \\ \frac{(-1)^{k+1}N!}{k(N-k)!k!} & k=1,2,\cdots,N, \end{cases}$$

yang membuktikan rumus koefisien beda maju (2.2).

5. Kesimpulan

Pada tugas akhir ini telah dijelaskan mengenai pembuktian matematis dari bentuk tutup rumus beda maju berdasarkan deret Taylor untuk menghampiri turunan pertama dari fungsi $f(x)$ di $x = x_0$, yang diberikan oleh

$$f_0' \approx \sum_{k}^{N} g_k f_k,$$

dimana $f_k = f(x_k)$, N menyatakan orde ketelitian, dan

$$g_k = \begin{cases} -\sum\limits_{j=1}^{N} \frac{1}{j} & k = 0, \\ \frac{(-1)^{k+1} N!}{k(N-k)!k!} & k = 1, 2, \cdots, N. \end{cases}$$

Pembuktian bentuk tutup tersebut menggunakan sifat-sifat determinan matriks Vandermonde dan beberapa manipulasi aljabar.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Dr. Jenizon dan Bapak Bukti Ginting, M. Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi kelima. Erlangga, Jakarta.

[2] Bartle, Robert G., dan Donald R. Sherbert. 2011. *Introduction to Real Analysis*. Edisi ke-4. John Wiley and Son, Urban-Champaign.

[3] Bengt, Fornberg. 1988. Generation of Finite Difference Formulas on Arbitrarily Spaced Grids. *Mathematics of Computation*. **51** : 184.

[4] I. R. Khan, R. Ohba, dan N. Hozumi. 2003. Mathematical proof of closed form expressions for finite difference approximations based on Taylor series. *J. Comput. Appl. Math.*. **150** : 303 – 309.

[5] I.R. Khan, dan R. Ohba. 1999. Closed form expressions for the finite difference approximations of first and higher derivatives based on Taylor series. *J. Comput. Appl. Math.* **107** : 179 – 193.

[6] Mathews, John H., K.D. Fink. 1992. *Numerical Methods for Computer Science, Engineering, and Mathematics*. Edisi ke-2. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

[7] Meyer, Carl D. 2000. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. SIAM. Philadelphia.