Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **4** Hal. 54 – 61
ISSN : 2303–291X

PENENTUAN SOLUSI SOLITON PADA PERSAMAAN KDV DENGAN MENGGUNAKAN METODE TANH

SILVIA ROSITA, MAHDHIVAN SYAFWAN, ADMI NAZRA
Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
silvia.rosita.sr@gmail.com

Abstrak. Persamaan Korteweg-de Vries (KdV) merupakan salah satu persamaan yang sering muncul pada berbagai aplikasi ilmu pengetahuan. Tesis ini mengkaji penentuan solusi soliton dengan menggunakan metode tangen hiperbolik (tanh). Hasil yang diperoleh kemudian dibandingkan dengan hasil yang sudah diperoleh sebelumnya dari beberapa literatur. Berdasarkan analisis yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa perhitungan solusi soliton menggunakan metode tanh dengan menerapkan syarat batas asimtotik pada kedua arah domain lebih efektif dibandingkan dengan syarat batas satu arah domain dan tanpa dikenakan syarat batas.

Kata Kunci: Persamaan KdV, Soliton, Metode tanh

1. Pendahuluan

Meningkatnya kajian dan perhatian terhadap model-model PDP dalam menjelaskan fenomena gelombang nonlinier, membuat semakin berkembangnya metode-metode alternatif dalam menyelesaikan suatu PDP (nonlinier) secara eksak. Beberapa diantaranya adalah Metode tanh, Metode Bilinier Hirota, Metode Ekspansi Painlevè, Metode Scattering Invers [10]. Dari berbagai macam metode yang telah dikembangkan tersebut, metode tanh dianggap paling efektif dalam menyelesaikan suatu model PDP (nonlinier) khususnya untuk memperoleh solusi gelombang berjalan [5,10].

Pada paper ini, metode tanh secara khusus akan digunakan untuk mencari solusi soliton pada persamaan *Korteweg-de Vries* (KdV), yaitu suatu persamaan yang memodelkan perambatan gelombang air pada lorong (chanel) yang tidak terlalu lebar [2]. Hal khusus yang dibahas pada paper ini adalah penerapan syarat batas pada metode tanh. Hal ini sesuai dengan sifat lokalisasi solusi yang ingin dicari, yaitu mempunyai profil yang menurun secara eksponensial menuju nol ketika koordinat spasial menuju $\pm\infty$. Pembahasan pada tesis ini mengeksplorasi kembali kajian pada [7], tetapi dengan perhitungan yang berbeda pada syarat batas.

2. Soliton dan Persamaan KdV

Pada Definisi 2.1 dan Definisi 2.2 diberikan definisi tentang soliton.

Definisi 2.1. [*11*] *Solusi gelombang soliter (solitary waves) pada persamaan difer-*

ensial parsial

$$\Delta(x, t, u) = 0, \tag{2.1}$$

adalah solusi gelombang berjalan (traveling waves) yang berbentuk

$$u(x, t) = U(\xi), \tag{2.2}$$

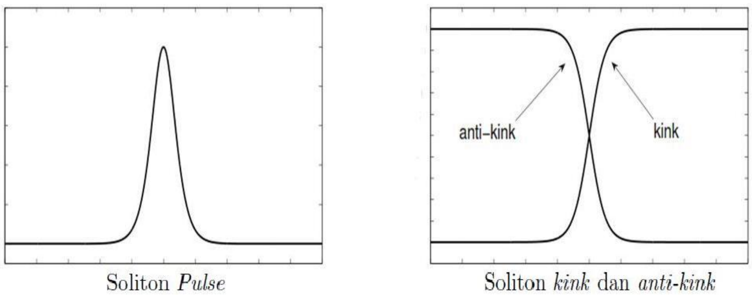
dimana $\xi = x - Vt$ *dengan* x *dan* t *adalah variabel bebas,* u *adalah variabel tak bebas dan* V *adalah kecepatan (bernilai konstan), dimana pada profilnya terjadi peralihan dari suatu keadaan asimtotik konstan bilamana* $\xi \to -\infty$ *ke suatu keadaan asimtotik konstan lainnya bilamana* $\xi \to \infty$.

Definisi 2.2. [*11*] *Soliton adalah gelombang soliter yang tetap mempertahankan bentuk dan kecepatannya setelah terjadi interaksi (tubrukan) dengan gelombang soliter lainnya atau bahkan dengan gelombang terlokalisasi lainnya.*

Lebih lanjut, terdapat dua jenis profil (gelombang soliter) yang sering dipelajari, yaitu:

(i) Gelombang yang memiliki puncak dengan ekor yang menurun secara eksponensial menuju nol bilamana koordinat spasial menuju $\pm\infty$. Gelombang ini dinamakan *pulse*.
(ii) Gelombang yang memiliki nilai asimtotik yang berbeda bilamana koordinat spasial menuju $+\infty$ dan $-\infty$. Gelombang ini dinamakan *kink*. Disamping itu, terdapat *anti-kink* yang merupakan hasil pencerminan dari *kink*.

Untuk lebih jelasnya, bentuk soliton *pulse*, soliton *kink* dan *anti-kink* dapat dilihat pada Gambar 1. Pada pembahasan selanjutnya, jika tidak disebutkan secara spesifik, istilah soliton pada paper ini mengacu ke soliton *pulse*.



Gambar 1. Dua jenis profil soliton

3. Metode tanh

Metode tangen hiperbolik (metode tanh) merupakan metode yang efektif secara simbolis untuk menghitung solusi gelombang berjalan. Secara umum persamaan diferensial parsial (PDP) nonlinier yang akan ditinjau pada paper ini dapat ditulis sebagai berikut.

$$u_t = f[u, u_x, u_{xx}, \cdots]. \tag{3.1}$$

Selanjutnya ingin diketahui solusi gelombang berjalan pada persamaan (2.2). Untuk tujuan itu dilakukan transformasi $u(x,t) = U(\xi)$ dimana $\xi = c(x - Vt)$ dengan $c > 0$ adalah bilangan gelombang dan V adalah kecepatan dari gelombang berjalan. Oleh karena itu, persamaan diferensial parsial (3.1) dapat ditransformasi menjadi persamaan diferensial biasa, yaitu :

$$-cV\frac{dU}{d\xi} = f[U, c\frac{dU}{d\xi}, c^2\frac{d^2U}{d\xi^2}, \cdots]. \tag{3.2}$$

Dalam mencari solusi tersebut, Malfliet [5,6,7] memperkenalkan variabel baru yaitu $Y = \tanh(\xi)$. Perhatikan bahwa perhitungan kita sekarang hanya bergantung pada Y, karena turunan $\frac{d}{dxi}$ diganti dengan $(1 - Y^2)\ \frac{d}{dY}$.

Solusi yang ingin dicari ditulis dalam bentuk deret pangkat hingga dalam Y. Ada dua kasus yang akan ditinjau, yaitu apakah solusi tersebut dikenakan syarat batas atau tidak.

(1) Tanpa syarat batas.
Solusi tanpa syarat batas ditulis dalam bentuk deret

$$F(Y) = \sum_{n=0}^{N} a_n Y^n. \tag{3.3}$$

(2) Dengan syarat batas.
Ada tiga subkasus yang akan ditinjau terkait dengan syarat batas ini.

(i) Solusi dengan syarat batas:

$$U(\xi) \to 0,\ \text{bilamana}\ \xi \to \infty,\ \text{atau}\ Y \to 1.$$

Dalam hal ini solusi ditulis dalam bentuk deret

$$F(Y) = (1 - Y)^m \sum_{n=0}^{N-m} a_n Y^n, \tag{3.4}$$

dimana $m = 1, \cdots, N$.

(ii) Solusi dengan syarat batas:

$$U(\xi) \to 0,\ \text{bilamana}\ \xi \to -\infty,\ \text{atau}\ Y \to -1.$$

Dalam hal ini solusi ditulis dalam bentuk deret

$$F(Y) = (1 + Y)^m \sum_{n=0}^{N-m} a_n Y^n, \tag{3.5}$$

dimana $m = 1, \cdots, N$.

(iii) Solusi dengan syarat batas:

$$U(\xi) \to 0,\ \text{bilamana}\ \xi \to \pm\infty\ \text{atau}\ Y\pm \to 1.$$

Dalam hal ini solusi ditulis dalam bentuk deret

$$F(Y) = (1-Y)^p(1+Y)^q \sum_{n=0}^{N-p-q} a_n Y^n, \tag{3.6}$$

dimana $p+q = 2, \cdots, N$ dan $p, q \in \mathbb{N}$.

Perhatikan bahwa ketiga subkasus di atas dapat digunakan untuk mencari solusi soliton berbentuk *kink* atau *pulse*. Lebih khusus, subkasus (iii) dipakai untuk menentukan solusi soliton *pulse*. Adapun langkah-langkah umum dalam metode tanh adalah [9] :

(1) Transformasikan bentuk umum persamaan gelombang nonlinier (3.1) menjadi persamaan diferensial biasa, seperti pada persamaan (3.2).

(2) Dalam metode tanh diperkenalkan variabel baru yaitu

$$Y = \tanh(\xi). \tag{3.7}$$

Dari fungsi di atas, diperoleh operator-operator turunan berikut ini :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} &= (1-Y^2)\ \frac{d}{dY}, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} &= (1-Y^2)\ \frac{d}{dY}\ \ [(1-Y^2)\ \frac{d}{dY}], \\ \frac{d^3}{d\xi^3} &= (1-Y^2)\ \frac{d}{dY}\ \ \{(1-Y^2)\ \frac{d}{dY}\ \ [(1-Y^2)\ \frac{d}{dY}]\}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

(3) Karena metode tanh dibedakan menjadi dua kasus, tanpa dan dengan syarat batas, substitusikan solusi deret yang sesuai ke dalam persamaan (2.2) dengan menggunakan hasil-hasil turunan pada langkah 2.

(4) Tentukan nilai N (pangkat tertinggi dari Y) dengan cara menggunakan prinsip *dominant balance*.

(5) Setelah diperoleh nilai N, substitusikan nilai N tersebut ke dalam persamaan sebelumnya (hasil langkah 3). Dengan membuat koefisien Y^n sama dengan nol, sehingga akan dihasilkan suatu sistem persamaan yang akan dicari solusinya untuk parameter-parameter terkait. Sistem persamaan ini diselesaikan dengan bantuan *software Maple*.

(6) Sebagai langkah terakhir, tulis solusi yang diperoleh (dalam Y) ke dalam bentuk variabel baru pada persamaan (3.7).

4. Penggunaan Metode tanh Pada Persamaan KdV

Pada bagian ini akan ditentukan solusi soliton dari persamaan KdV di atas dengan menggunakan metode tanh. Berikut adalah langkah-langkah penyelesaiannya.
Gunakan transformasi $u(x,t) = U(\xi)$, dimana $\xi = c(x - Vt)$ dan $c > 0$, sehingga diperoleh :

$$-cV\frac{dU(\xi)}{d\xi} \ +\ 6cU(\xi)\frac{dU(\xi)}{d\xi} \ +\ c^3\frac{d^3U(\xi)}{d\xi^3} = 0. \tag{4.1}$$

Dengan mengintegralkan persamaan (4.1) diperoleh :

$$-cVU(\xi) + 3cU(\xi)^2 + c^3 \frac{d^2U(\xi)}{d\xi^2} = 0. \tag{4.2}$$

Untuk langkah selanjutnya akan dibedakan atas kasus tanpa syarat dan dengan syarat batas.

(1) Tanpa Syarat Batas.
Dengan menggunakan (3.2), persamaan (4.2) menjadi

$$-cVF(Y) + 3cF(Y)^2 + c^3(1-Y^2)\frac{d}{dY}[(1-Y^2)\frac{d}{dY}F(Y)] = 0, \tag{4.3}$$

Selanjutnya, substitusi (3.3) ke (4.3) sehingga diperoleh persamaan dengan dua suku yang mempunyai *leading order* yaitu Y^{2N} dan Y^{N+2}. Dengan menggunakan prinsip *dominant balance* berlaku

$$2N = N + 2 \Leftrightarrow N = 2. \tag{4.4}$$

sehingga (3.3) menjadi

$$F(Y) = a_0 + a_1Y + a_2Y^2, \tag{4.5}$$

dan persamaan (4.2) setelah mengumpulkan suku-sukunya berdasarkan pangkat Y kemudian membuat koefisien Y^n, $n = 0, 1, \cdots, 4$, sama dengan nol, sehingga diperoleh sistem persamaan berikut :

$$\begin{aligned}
&Y^0 : -cVa_0 + 3ca_0^2 + 2c^3a_2 = 0,\\
&Y^1 : -cVa_1 + 6ca_0a_1 - 2c^3a_1 = 0,\\
&Y^2 : -cVa_2 + 3c(2a_0a_2 + a_1^2) - 8c^3a_2 = 0,\\
&Y^3 : 6ca_1a_2 + 2c^3a_1 = 0,\\
&Y^4 : 3ca_2^2 + 6c^3a_2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Dengan menggunakan *software Maple*, diperoleh himpunan solusi untuk parameter-parameter sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ V = 3a_0^2\\
a_0 &= \frac{2c^2}{3},\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ V = 2c^2\\
a_0 &= \frac{2c^2}{3},\ a_1 = 0,\ a_2 = -2c^2,\ V = -4c^2\\
a_0 &= 2c^2,\ a_1 = 0,\ a_2 = -2c^2,\ V = 4c^2,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

dimana c dibiarkan sebagai parameter sebarang.

Dengan demikian solusi persamaan KdV untuk kasus tanpa dikenakan syarat batas diberikan oleh

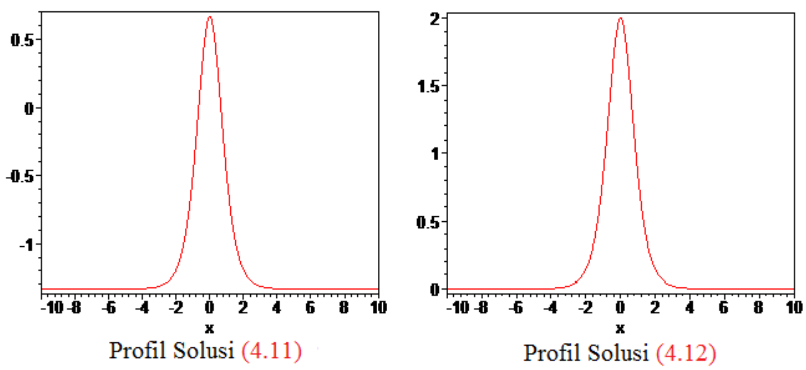
$$u_1(x,t) = 0, \tag{4.8}$$

$$u_2(x,t) \equiv F(Y) = \frac{2c^2}{3}, \tag{4.9}$$

$$u_3(x,t) \equiv F(Y) = \frac{A}{3}\ \{1 - 3\tanh^2[\sqrt{\frac{A}{2}}(x+2At)]\}, \tag{4.10}$$

$$u_4(x,t) \equiv F(Y) = A\ sech^2\ [\sqrt{\frac{A}{2}}(x-2At)], \tag{4.11}$$

dengan $A = 2c^2$. Perhatikan bahwa solusi (4.11) merupakan solusi soliton berbentuk *pulse*, tampilan profilnya diberikan oleh Gambar 2.



Gambar 2. Profil Solusi (4.11) dan (4.12) untuk $c = 1$ dan $t = 0$

(2) Dengan Syarat Batas.
Ada tiga subkasus syarat batas yang akan ditinjau.

(i) Solusi syarat batas yang diberikan oleh (3.4)
dengan menggunakan cara yang sama pada kasus tanpa syarat diperoleh $N = 2$, sehingga (3.4) menjadi

$$F(Y) = (1-Y)^m \sum_{n=0}^{2-m} a_n Y^n. \tag{4.12}$$

Perhatikan bahwa terdapat dua kemungkinan nilai untuk m.

(i) Untuk $m = 1$, diperoleh

$$F(Y) = (1-Y)(a_0 + a_1 Y), \tag{4.13}$$

dengan solusi persamaan KdV diperoleh sebagai berikut :

$$u(x,t) \ \equiv\ F(Y) = A\ \mathrm{sech}^2\ [\sqrt{\frac{A}{2}}(x-2At)], \tag{4.14}$$

(ii) Untuk $m = 2$, diperoleh

$$F(Y) = a_0(1 - Y)^2. \tag{4.15}$$

diperoleh solusi trivial $u(x,t) = 0$.

(ii) Solusi syarat batas yang diberikan oleh (3.5), diperoleh $N = 2$, sehingga (3.5) menjadi

$$F(Y) = (1 + Y)^m \sum_{n=0}^{2-m} a_n Y^n. \tag{4.16}$$

Perhatikan bahwa terdapat dua kemungkinan nilai untuk m.

(i) Untuk $m = 1$, diperoleh

$$F(Y) = (1 + Y)(a_0 + a_1 Y), \tag{4.17}$$

dengan solusi persamaan KdV diperoleh sebagai berikut :

$$u(x,t) \;\equiv\; F(Y) = A \text{ sech}^2 \; [\sqrt{\frac{A}{2}}(x - 2At)], \tag{4.18}$$

(ii) Untuk $m = 2$, diperoleh

$$F(Y) = a_0(1 + Y)^2. \tag{4.19}$$

diperoleh solusi trivial $u(x,t) = 0$.

(iii) Solusi syarat batas yang diberikan oleh (3.6), diperoleh $N = 2$, sehingga (3.6) menjadi

$$F(Y) = (1 - Y)^p (1 + Y)^q \sum_{n=0}^{2-(p+q)} a_n Y^n. \tag{4.20}$$

diperoleh

$$u(x,t) \equiv F(Y) = A \text{ sech}^2 \; [\sqrt{\frac{A}{2}}(x - 2At)], \tag{4.21}$$

dengan $A = 2c^2$,

5. Kesimpulan

Perhitungan metode tanh dengan menggunakan syarat batas (*iii*) menghasilkan solusi tunggal, yaitu solusi soliton berbentuk *pulse*. Sehingga dapat disimpulkan untuk menentuan solusi soliton *pulse* dengan menerapkan syarat batas (*iii*) lebih efektif perhitungannya dibandingkan dengan syarat batas lain.

Daftar Pustaka

[1] Baldwin, D., Göktas, Ü., dan Hereman, W., 2004, Symbolic Computation of Hyperbolic Tangent Solutions for Nonlinear Differential-Difference Equations, *Computer Physics Communications* **162** : 203 – 217.

[2] Dauxois, T., dan Michel, P. 2010, *Physics of Solitons*, Cambridge University Perss, Cambridge.

[3] Drazin, P. G., dan Jhonson, R.S., 1989, *Soliton : An Introduction*, Cambridge University Perss, Cambridge.

[4] King, A.C., Billingham, J., dan Otto, S.R., 2003, *Differential Equations*, Cambridge University, Cambridge.

[5] Malfliet, W., 1992, Solitary Wave Solutions of Nonlinear Wave Equations, *Am. J. Phys.* **60** : 650 – 654.

[6] Malfliet, W., dan Hereman, W., 1996, The tanh Method : 1. Exact Solutions of Nonlinear Evolution and Wave Equation, *Physica Scripta* **54** : 563 – 568.

[7] Malfliet, W., 2004, The tanh Method : A Tool for Solving Certain Classes of Nonlinear Evolution and Wave Equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **164** : 529 – 541.

[8] Nayfeh, A. H., 1993, *Introduction to Pertubation Techniques*, Wiley Classic Library, Virginia.

[9] Wazwaz, A.M., 2004, The tanh Method for Traveling Wave Solutions of Nonlinear Equations, *Applied Mathematics and Computations* **154** : 713 – 723.

[10] Wazwaz, A.M., 2009, *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*, Springer, Berlin Heidelberg.

[11] Verdultz, M. W. J., 2011, *Soliton*, Disertasi, University Utrecht.