Jurnal Matematika UNAND
Vol. **1** No. **2** Hal. 13 – 20
ISSN : 2303–291X

DEKOMPOSISI PRA A*-ALJABAR

RAHMIATI ABAS

Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
rahmiati.abas@gmail.com

Abstrak. Suatu sistem matematika $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^{\sim})$ dinamakan Pra A*-Aljabar, bila anggota-anggotanya memenuhi sifat-sifat tertentu. Untuk selanjutnya, sistem $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^{\sim})$ ditulis A yang menyatakan Pra A*-Aljabar. Misal didefinisikan sebuah relasi " $\leq$ " pada Pra A*-Aljabar dengan $x \leq y$ jika dan hanya jika $y \wedge x = x \wedge y = x$. Selanjutnya misalkan terdapat suatu sistem matematika $(M_x, \wedge, \vee, *)$ dengan $M_x = \{s \in A | s \leq x\}$. Misalkan terdapat himpunan $B(A) = \{x \in A | x \vee x^{\sim} = 1\}$ yang disebut senter (*centre*) dari A, dan didefinisikan $M'_a = \{s \in B(A) | s \leq a\}$ dan $M'_{a^{\sim}} = \{t \in B(A) | t \leq a^{\sim}\}$. Pada tulisan ini dikaji sifat-sifat dari M_x, yaitu: suatu sistem $(M_x, \wedge, \vee, *)$ adalah Pra A*-Aljabar dengan unsur identitas 1, $M_x = \{x \wedge s | s \in A\}$, $M_x = M_y$ jika dan hanya jika $x = y$, $M_x \cap M_y = M_{x \wedge y}$, $(M_x)_{x \wedge y} = M_{x \wedge y}$, dan pemetaan $\alpha_x : A \rightarrow M_x$ adalah sebuah homomorfisma pada. Kemudian juga dikaji bahwa A monomorfik dengan $M_a \times M_{a^{\sim}}$ dan $B(A) \cong M'_a \times M'_{a^{\sim}}$.

Kata Kunci: Aljabar Boolean, Pra A*-Aljabar, Pra A*-Homomorfisma, Dekomposisi Pra A*-Aljabar

1. Pendahuluan

Gagasan Pra A*-Aljabar pertama kali diperkenalkan pada tahun 2000 oleh J. Venkateswara Rao. Pra A*-Aljabar merupakan suatu sistem matematika $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^{\sim})$ dimana A adalah himpunan tak kosong, $\wedge$ (meet) dan $\vee$ (join) adalah operasi-operasi biner, dan $(\cdot)^{\sim}$ (tilda) adalah operasi tunggal, yang anggota-anggotanya memenuhi sifat-sifat: $x^{\sim\sim} = x$, $x \wedge x = x$, $x \wedge y = y \wedge x$, $(x \wedge y)^{\sim} = x^{\sim} \vee y^{\sim}$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, dan $(x \wedge y) = x \wedge (x^{\sim} \vee y)$.

Misalkan didefinisikan sebuah relasi " $\leq$ " pada Pra A*-Aljabar dengan $s \leq x$ jika dan hanya jika $s \wedge x = x \wedge s = s$. Selanjtunya misalkan terdapat suatu sistem matematika $(M_x, \wedge, \vee, *)$ dengan $M_x = \{s \in A | s \leq x\}$.

Misalkan terdapat himpunan $B(A) = \{x \in A | x \vee x^{\sim} = 1\}$ yang disebut senter (*centre*) dari A. Kemudian didefinisikan $M'_a = \{s \in B(A) | s \leq a\}$ dan $M'_{a^{\sim}} = \{t \in B(A) | t \leq a^{\sim}\}$.

Makalah ini merupakan tinjauan ulang dari rujukan pustaka [2]. Pada makalah ini penulis mengkaji kembali tentang Dekomposisi Pra A*-Aljabar.

2. Pra A*-Aljabar

Pada tulisan, diberikan definisi dari Pra A*-Aljabar dan sifat-sifat dari Pra A*-Aljabar.

Definisi 2.1. [**3**] *Misal A adalah himpunan tak kosong. Suatu sistem matematika $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^{\sim})$ dikatakan Pra A*-Aljabar, dengan $\wedge$ (meet) dan $\vee$ (join) adalah operasi-operasi biner, dan $(\cdot)^{\sim}$ (tilda) adalah operasi tunggal, jika untuk setiap $x, y, z, \in A$, berlaku: (i) $x^{\sim\sim} = x$, (ii) $x \wedge x = x$, (iii) $x \wedge y = y \wedge x$, (iv) $(x \wedge y)^{\sim} = x^{\sim} \vee y^{\sim}$, (v) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, (vi) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, (vii) $(x \wedge y) = x \wedge (x^{\sim} \vee y)$.*

Definisi 2.2. *Misalkan sistem $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^{\sim})$ adalah Pra A*-Aljabar dengan unsur identitas 1 dan 0. Suatu sistem lain, namakan A^* dinamakan dual dari A jika:*

(1) $\wedge$ diganti dengan $\vee$,
(2) $\vee$ diganti dengan $\wedge$,
(3) 0 diganti dengan 1,
(4) 1 diganti dengan 0.

Contoh 2.3. Himpunan $\mathbf{W} = \{0, 1, 2\}$ adalah suatu Pra A*-Aljabar dengan operasi $\vee, \wedge$, dan $(\cdot)^{\sim}$ yang didefinisikan seperti pada tabel berikut:

$\wedge$	0	1	2
0	0	0	2
1	0	1	2
2	2	2	2

Tabel 1. Operasi Biner $\wedge$ pada A

$\vee$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	1	2
2	2	2	2

Tabel 2. Operasi Biner $\vee$ pada A

x	$x^{\sim}$
0	1
1	0
2	2

Tabel 3. Operasi $^{\sim}$ pada A

Definisi 2.4. [**3**] *Misalkan A adalah Pra A*-Aljabar. Suatu unsur $x \in A$ disebut elemen sentral dari A jika $x \vee x^{\sim} = 1$. Selanjutnya, himpunan $\{x \in A | x \vee x^{\sim} = 1\}$*

disebut sebagai himpunan semua elemen sentral dari A*, yang disebut senter* (centre) *dari* A *dan dinotasikan dengan* $B(A)$.

Teorema 2.5. [**3**] *Misalkan* A *adalah Pra A*-Aljabar dengan unsur identitas* 1*, maka* $B(A)$ *adalah aljabar Boolean dengan operasi* $\vee, \wedge, (\cdot)^{\sim}$.

Definisi 2.6. [**3**] *Misalkan* A_1 *dan* A_2 *merupakan dua Pra A*-Aljabar. Pemetaan* $f : A_1 \to A_2$ *disebut Pra A*-homomorfisma jika untuk setiap* $a, b \in A_1$ *berlaku:*

(1) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$,
(2) $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$,
(3) $f(a^{\sim}) = (f(a))^{\sim}$.

Jika homomorfisma $f : A_1 \to A_2$ *adalah pada, maka* f *disebut epimorfisma. Jika homomorfisma* $f : A_1 \to A_2$ *adalah satu - satu, maka* f *disebut monomorfisma. Jika homomorfisma* $f : A_1 \to A_2$ *adalah satu - satu dan pada, maka* f *disebut isomorfisma, dan* A_1*,* A_2 *adalah isomorfik, yang dinotasikan dengan* $A_1 \cong A_2$.

Definisi 2.7. *Misalkan* A *adalah Pra A*-Aljabar. Didefinisikan sebuah relasi* " $\leq$ " *pada* A *dengan* $x \leq y$ *jika dan hanya jika* $y \wedge x = x \wedge y = x$*, untuk setiap* $x, y \in A$.

3. Pra A*-Aljabar M_x

Pada tulisan, akan dibahas sifat dari sistem $(M_x, \wedge, \vee, *)$ yang dinyatakan dalam beberapa teorema berikut.

Teorema 3.1. [**2**] *Misalkan* A *adalah sebuah Pra A*-Aljabar dengan* $x \in A$*, dan* $M_x = \{s \in A | s \wedge x = x \wedge s = s\}$*. Maka* $(M_x, \wedge, \vee, *)$ *adalah Pra A*-Aljabar dengan unsur identitas 1, dimana* $\wedge$ *dan* $\vee$ *adalah operasi biner di* A *yang dibatasi pada* M_x.

Bukti. Misalkan $x \in A$ dan $M_x = \{s \in A | s \wedge x = x \wedge s = s\}$. Sebelumnya akan ditunjukkan bahwa jika $s \in M_x$, maka $s^* \in M_x$. Misalkan $s \in M_x$, berarti $s \in A$ dan $s \wedge x = x \wedge s = s$. Karena $s \in A$, maka $s^* \in A$. Akibatnya $s^* \wedge x = (x \wedge s^{\sim}) \wedge x = (s^{\sim} \wedge x) \wedge x = s^{\sim} \wedge (x \wedge x) = s^{\sim} \wedge x = x \wedge s^{\sim} = s^*$, sehingga $s^* \in M_x$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $(M_x, \wedge, \vee, *)$ adalah Pra A*-Aljabar dengan unsur identitas 1. Berdasarkan Definisi 2.3.6, cukup ditunjukkan:

(1) Misalkan $s \in M_x$. Akan ditunjukkan $s^{**} = s$.
Perhatikan bahwa: $s^{**} = (s^*)^* = (x \wedge s^{\sim})^* = (x \wedge (x \wedge s^{\sim})^{\sim}) = (x \wedge (x^{\sim} \vee s) = x \wedge s = s$.
(2) Misalkan $s, t \in M_x$. Akan ditunjukkan $(s \wedge t)^* = s^* \vee t^*$.
Perhatikan bahwa: $(s \wedge t)^* = x \wedge (s \wedge t)^{\sim} = x \wedge (s^{\sim} \vee t^{\sim}) = (x \wedge s^{\sim}) \vee (x \wedge t^{\sim}) = s^* \vee t^*$.
(3) Misalkan $s, t \in M_x$. Akan ditunjukkan $s \wedge t = s \wedge (s^* \vee t)$.
Perhatikan bahwa: $s \wedge (s^* \vee t) = s \wedge ((x \wedge s^{\sim}) \vee t) = (s \wedge (x \wedge s^{\sim})) \vee (s \wedge t) = (s \wedge x \wedge s^{\sim}) \vee (s \wedge t) = ((s \wedge x) \wedge s^{\sim}) \vee (s \wedge t) = (s \wedge s^{\sim}) \vee (s \wedge t) = (s^{\sim} \wedge s) \vee (s \wedge t) = (s \wedge t) \vee (s^{\sim} \wedge s) = (s^{\sim} \vee t) \wedge s = t \wedge s = s \wedge t$.

Untuk sifat-sifat lainnya, selama anggota dari sifat-sifat tersebut berada di A maka anggota dari sifat-sifat tersebut juga berada di M_x. Oleh karena itu, $(M_x, \wedge, \vee, *)$ adalah Pra A*-Aljabar. ■ □

Teorema 3.2. [**2**] *Misalkan A sebuah Pra A*-Aljabar, maka untuk setiap $x, y \in A$ berlaku:*

(1) $M_x = \{x \wedge s | s \in A\}$,
(2) $M_x = M_y$ *jika dan hanya jika* $x = y$,
(3) $M_x \cap M_y = M_{x \wedge y}$,
(4) $(M_x)_{x \wedge y} = M_{x \wedge y}$.

Bukti. Misalkan A sebuah Pra A*-Aljabar dan misalkan $x, y \in A$.

(1) Jelas dari definisi.
(2) $(\Rightarrow)$ Misalkan $M_x = M_y$, berarti $s \in M_x$, $s \in M_y$. Akan ditunjukkan $x = y$. Andaikan $x \neq y$, maka $s \wedge x \neq s \wedge y$. Hal ini kontradiksi dengan $M_x = M_y$. Jadi haruslah $x = y$.
$(\Leftarrow)$ Misalkan $x = y$. Akan ditunjukkan $M_x = M_y$, yaitu dengan menunjukkan (i) $M_x \subset M_y$, (ii) $M_x \supset M_y$.
(i) Misalkan $z \in M_x$, maka berlaku $z \in A$ dan $z \wedge x = x \wedge z = z$. Karena $x = y$, maka $z \wedge y = y \wedge z = z$. Jadi $z \in M_y$. Oleh karena itu $M_x \subset M_y$.
(ii) Misalkan $z \in M_y$, maka berlaku $z \in A$ dan $z \wedge y = y \wedge z = z$. Karena $x = y$, maka $z \wedge x = x \wedge z = z$. Jadi $z \in M_x$. Oleh karena itu $M_x \supset M_y$.
Dari (i) dan (ii), maka $M_x = M_y$.
(3) Akan ditunjukkan $M_x \cap M_y = M_{x \wedge y}$, yaitu dengan menunjukkan (i) $M_x \cap M_y \subset M_{x \wedge y}$, (ii) $M_x \cap M_y \supset M_{x \wedge y}$.
(i) Misalkan $s \in M_x \cap M_y$, maka $s \in M_x$ dan $s \in M_y$.
Dari $s \in M_x$ diperoleh $s \in A$ dan $s \wedge x = x \wedge s = s$. Sedangkan, dari $s \in M_y$ diperoleh $s \in A$ dan $s \wedge y = y \wedge s = s$.
Perhatikan bahwa: $(x \wedge y) \wedge s = x \wedge (y \wedge s) = x \wedge s = s$.
Jadi diperoleh $s \in A$ dan $(x \wedge y) \wedge s = s \wedge (x \wedge y)$, sehingga $s \in M_{x \wedge y}$. Oleh karena itu, $M_x \cap M_y \subset M_{x \wedge y}$.
(ii) Misalkan $s \in M_{x \wedge y}$ berarti $s \in A$ dan $(x \wedge y) \wedge s = s \wedge (x \wedge y) = s$.
Perhatikan bahwa: $x \wedge s = x \wedge ((x \wedge y) \wedge s) = (x \wedge x) \wedge y \wedge s = (x \wedge y) \wedge s = s$.
Jadi $s \in A$ dan $x \wedge s = s \wedge x = s$, sehingga $s \in M_x$.
Dan, perhatikan bahwa: $y \wedge s = y \wedge ((x \wedge y) \wedge s) = (y \wedge y) \wedge x \wedge s = y \wedge x \wedge s = (x \wedge y) \wedge s = s$.
Jadi $s \in A$ dan $y \wedge s = s \wedge y = s$, sehingga $s \in M_y$. Karena $s \in M_x$ dan $s \in M_y$, maka $M_x \cap M_y \supset M_{x \wedge y}$.
Dari (i) dan (ii), maka $M_x \cap M_y = M_{x \wedge y}$.
(4) Misalkan $t \in M_x$, maka $(M_x)_{x \wedge y} = \{(x \wedge y) \wedge t | t \in M_x\} = \{(x \wedge y) \wedge (x \wedge s) | s \in A\} = \{(x \wedge y) \wedge s | s \in A\} = M_{x \wedge y}$. ■ □

Teorema 3.3. [**2**] *Misalkan A adalah sebuah Pra A*-Aljabar dengan unsur identitas 1 dan $x \in A$, maka pemetaan $\alpha_x : A \to M_x$ yang didefinisikan sebagai $\alpha_x(s) = x \wedge s$ untuk setiap $s \in A$, adalah sebuah homomorfisma pada.*

Bukti. Misalkan $s, t \in A$. Sebelumnya, akan ditunjukkan α_x adalah sebuah homomorfisma.

Perhatikan bahwa

(1) $\alpha_x(s \wedge t) = x \wedge (s \wedge t) = (x \wedge s) \wedge (x \wedge t) = \alpha_x(s) \wedge \alpha_x(t)$.
(2) $\alpha_x(s \vee t) = x \wedge (s \vee t) = (x \wedge s) \vee (x \wedge t) = \alpha_x(s) \vee \alpha_x(t)$.
(3) $\alpha_x(s^\sim) = x \wedge s^\sim = x \wedge (x^\sim \vee s^\sim) = x \wedge (x \wedge s)^\sim = (x \wedge t)^* = (\alpha_x(s^\sim))^*$.

Selanjutnya ambil $s \in M_x$, akan dicari $s \in A$ sehingga $s = \alpha_x(s)$. Karena $s \wedge x = s$ dan diketahui $\alpha_x(s) = s \wedge x$, maka terdapat $s \in A$ sedemikian sehingga $\alpha_x(s) = s$. Oleh karena itu, α_x adalah homomorfisma pada.■ □

4. Dekomposisi dari A

Pada tulisan, akan dibahas kaitan antara suatu Pra A*-Aljabar A dengan dekomposisi Pra A*-Aljabar $M_a \times M_{a^\sim}$ dan himpunan semua elemen sentral dari A, $B(A)$ dengan dekomposisi Pra A*-Aljabar $M'_a \times M'_{a^\sim}$. Pertama-tama, akan dibuktikan lema berikut yang digunakan untuk membuktikan hasil utama pada bagian ini.

Lema 4.1. [**2**] *Misalkan A adalah Pra A*-Aljabar dengan unsur identitas 1, dan $B(A)$ adalah himpunan semua elemen sentral dari A. Misal $a \in B(A)$, dan $x, y \in A$. Maka $a \wedge x = a \wedge y$ dan $a^\sim \wedge x = a^\sim \wedge y \Leftrightarrow x = y$.*

Bukti. Misalkan $a \in B(A)$ dan $x, y \in A$.

($\Rightarrow$) Misalkan $a \wedge x = a \wedge y$ dan $a^\sim \wedge x = a^\sim \wedge y$. Akan ditunjukkan $x = y$.

Perhatikan bahwa: $x = 1 \wedge x = (a \vee a^\sim) \wedge x = (a \wedge x) \vee (a^\sim \wedge x) = (a \wedge y) \vee (a^\sim \wedge y) = (a \vee a^\sim) \wedge y = 1 \wedge y = y$.

($\Leftarrow$) Misalkan $x = y$. Akan ditunjukkan $a \wedge x = a \wedge y$ dan $a^\sim \wedge x = a^\sim \wedge y$. Karena $x = y$, maka $a \wedge x = a \wedge y$ dan $a^\sim \wedge x = a^\sim \wedge y$. ■ □

Definisi 4.2. *Misalkan A_1, A_2 adalah dua Pra A*-Aljabar dengan $A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) | a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$. Untuk setiap $a_1, a_3 \in A_1, a_2, a_4 \in A_2$, berlaku sifat-sifat berikut:*

(1) $(a_1, a_2) \wedge (a_3, a_4) = (a_1 \wedge a_3, a_2 \wedge a_4)$,
(2) $(a_1, a_2) \vee (a_3, a_4) = (a_1 \vee a_3, a_2 \vee a_4)$,
(3) $(a_1, a_2)^\sim = (a_1^\sim, a_2^\sim)$.

Teorema 4.3. [**2**] *Misalkan A adalah sebuah Pra A*-Aljabar dengan unsur identitas 1 dan $a \in B(A)$, maka A monomorfik dengan $M_a \times M_{a^\sim}$.*

Bukti. Misalkan $a \in B(A)$ dan $x, y \in A$. Didefinisikan $\alpha : A \to M_a \times M_{a^\sim}$ dengan $\alpha(x) = (\alpha_a(x), \alpha_{a^\sim}(x)), \forall x \in A$.

Pertama-tama, akan ditunjukkan α terdefinisi dengan baik. Ambil $x, y \in A$ dengan $x = y$. Akan ditunjukkan $\alpha(x) = \alpha(y)$. Karena $x = y$, maka berdasarkan Lema 1 berlaku $a \wedge x = a \wedge y$ dan $a^\sim \wedge x = a^\sim \wedge y$. Akibatnya $\alpha(x) = (\alpha_a(x), \alpha_{a^\sim}(x)) = (a \wedge x, a^\sim \wedge x) = (a \wedge y, a^\sim \wedge y = (\alpha_a(y), \alpha_{a^\sim}(y)) = \alpha(y)$.

Kemudian, akan ditunjukkan bahwa α adalah homomorfisma.

Perhatikan bahwa:

(1) $\alpha(x \wedge y) = (\alpha_a(x \wedge y), \alpha_{a^\sim}(x \wedge y)) = (\alpha_a(x) \wedge \alpha_a(y), \alpha_{a^\sim}(x) \wedge \alpha_{a^\sim}(y)) = (\alpha_a(x) \wedge \alpha_{a^\sim}(x), \alpha_a(y) \wedge \alpha_{a^\sim}(y)) = \alpha(x) \wedge \alpha(y)$.
(2) $\alpha(x \vee y) = (\alpha_a(x \vee y), \alpha_{a^\sim}(x \vee y)) = (\alpha_a(x) \vee \alpha_a(y), \alpha_{a^\sim}(x) \vee \alpha_{a^\sim}(y)) = (\alpha_a(x) \vee \alpha_{a^\sim}(x), \alpha_a(y) \vee \alpha_{a^\sim}(y)) = \alpha(x) \vee \alpha(y)$.
(3) $\alpha(x^\sim) = (\alpha_a(x^\sim), \alpha_{a^\sim}(x^\sim)) = ((\alpha_a(x))^\sim, (\alpha_{a^\sim}(x))^\sim) = ((\alpha_a(x), \alpha_{a^\sim}(x))^\sim) = (\alpha(x))^\sim$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan α adalah satu-satu. Misal $\alpha(x) = \alpha(y)$, maka $a \wedge x = a \wedge y$ dan $a^\sim \wedge x = a^\sim \wedge y$. Sehingga berdasarkan Lema 1, diperoleh $x = y$. Karena α homomorfisma dan satu-satu, maka α adalah monomorfisma, sehingga α monomorfik dengan $M_a \times M_{a^\sim}$. ■ □

Teorema 4.4. [**2**] *Misalkan A adalah sebuah Pra A*-Aljabar dengan unsur identitas 1 dan $B(A)$ adalah himpunan semua elemen sentral dari A. Misal $a \in B(A)$, dan notasikan $M'_a = \{s \in B(A) | s \le a\}$ dan $M'_{a^\sim} = \{t \in B(A) | t \le a^\sim\}$. Maka $B(A) \cong M'_a \times M'_{a^\sim}$.*

Bukti. Misalkan $a \in B(A)$. Didefinisikan $\beta : B(A) \to M'_a \times M'_{a^\sim}$ dengan $\beta(x) = (\beta_a(x), \beta_{a^\sim}(x)), \forall x \in B(A)$.

Karena pendefinisian β analog dengan α pada Teorema 5, maka β adalah monomorfisma.

Selanjutnya, akan ditunjukkan β adalah suatu epimorfisma. Ambil $(x, y) \in M'_a \times M'_{a^\sim}$ sebarang. Berarti $x \in B(A)$ dan $x \le a$, dan $y \in B(A)$ dan $y \le a^\sim$. Karena $x \le a$ diperoleh $a \wedge x = x$, selanjutnya karena $y \le a^\sim$ diperoleh $a^\sim \wedge y = y$. Akibatnya, $a^\sim \wedge x = a^\sim \wedge a \wedge x = 1 \wedge x = 0$ dan $a \wedge y = a \wedge a^\sim \wedge y = 1 \wedge y = 0$.

Karena $x, y \in B(A)$, maka $(x \vee y) \vee (x \vee y)^\sim = (x \vee y) \vee 1 = x \vee (y \vee 1) = x \vee (y \vee y^\sim) = x \vee 1 = x \vee x^\sim = 1$. Oleh karena itu diperoleh bahwa $x \vee y \in B(A)$.

Perhatikan bahwa: $\beta(x \vee y) = (\beta_a(x \vee y), \beta_{a^\sim}(x \vee y)) = (a \wedge (x \vee y), a^\sim \wedge (x \vee y)) = ((a \wedge x) \vee (a \wedge y), (a^\sim \wedge x) \vee (a^\sim \wedge y)) = (a \wedge x, a^\sim \wedge y = (x, y)$.

Jadi $\forall (x, y) \in M'_a \times M'_{a^\sim}$ terdapat $x \vee y \in B(A)$ sehingga $\alpha(x \vee y) = (x, y)$, sehingga β adalah epimorfisma.

Karena β homomorfisma satu-satu dan pada, maka β adalah isomorfisma, sehingga $B(A) \cong M'_a \times M'_{a^\sim}$. ■ □

5. Kesimpulan

Misal suatu sistem matematika $(A, \wedge, \vee, (\cdot)^\sim)$ adalah Pra A*-Aljabar. Selanjutnya diperoleh definisi dan sifat-sifat dari Pra A*-Aljabar seperti pada bagian 2, serta diperoleh juga sifat-sifat dari M_x seperti pada bagian 3. Dengan mendefinisikan $M'_a = \{s \in B(A) | s \le a\}$ dan $M'_{a^\sim} = \{t \in B(A) | t \le a^\sim\}$ dengan $B(A) = \{x \in A | x \vee x^\sim = 1\}$ yang disebut senter (*centre*) dari A. Kemudian diperoleh Dekomposisi dari A seperti pada bagian 4.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Admi Nazra, Ibu Nova Noliza Bakar, Ibu Lyra Yulianti, Bapak Dodi Devianto, Bapak Zulakmal, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Satyanarayana, A. dan J.V. Rao. 2011. *Representation of Pre A*-Algebra by Section of Sheaves*. International Journal of Computational Cognition, Vol. 9, No. 2, June 2011 (40-44).

[2] Rao, J.V., S. Rao, dan D. Kalyani. 2011. *Decomposition of Pre A*-Algebra*. International Journal of Mathematical Sciences and Applications, Vol.1 (1) Januari 2011.

[3] Rao, J.V. dan S. Rao. 2009. *Pre A*-Algebra as a Poset*. African Journal of Mathematics and Computer Science Research, Vol 2 (4), May 2009 (073-080).