Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **4** Hal. 72 – 79
ISSN : 2303–291X

BILANGAN *STRONG RAINBOW CONNECTION* UNTUK GRAF RODA DAN GRAF KUBIK

WITRI YULIANI
Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas
Limau Manis Padang, Sumatera Barat, Indonesia,
email : witriyuliani.wy@gmail.com

Abstrak. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak *trivial*. Definisikan suatu pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\},\ k \in N$, dimana dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan $u-v$ *path* P di G dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*. Pewarnaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Bilangan *Rainbow connection* dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected*. Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G. Untuk dua titik u dan v di G, *rainbow* $u-v$ *geodesic* pada G adalah *rainbow* $u-v$ *path* yang panjangnya $d(u,v)$ dimana $d(u,v)$ adalah jarak antara u dan v (panjang $u-v$ *path* terpendek di G. Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G memiliki suatu *rainbow* $u-v$ *geodesic* untuk setiap dua titik u dan v di G. Minimum k yang terdapat pada pewarnaan c sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow connected* dikatakan bilangan *strong rainbow connection*, $src(G)$, di G. Pada paper ini akan dikaji tentang bilangan *strong rainbow connection* untuk graf Roda dan graf Kubik.

Kata Kunci: Bilangan Strong Rainbow Connection, graf Roda, graf Kubik

1. Pendahuluan

Konsep *rainbow connection* suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, Johns, McKeon dan Zhang [3] pada tahun 2006. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak *trivial*. Definisikan suatu pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}, k \in N$, dimana dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan $u-v$ *path* P di G dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*.

Pewarnaaan sisi yang menyebabkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Jelas jika G adalah *rainbow connected*, maka G terhubung. Sebaliknya, setiap graf terhubung memiliki pewarnaan sisi *trivial* sehingga G bersifat *rainbow connected*, yaitu setiap sisi diwarnai dengan warna berbeda. Bilangan *Rainbow connection* dari graf terhubung G, ditulis $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected*. Suatu *rainbow coloring* yang menggunakan sebanyak $rc(G)$ warna dikatakan *minimum rainbow coloring*.

Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G. Untuk dua titik u dan v di G, *rainbow* $u-v$ *geodesic* pada G adalah *rainbow* $u-v$ *path* yang panjangnya $d(u,v)$ dimana $d(u,v)$ adalah jarak antara u dan v (panjang $u-v$ *path* terpendek di (G). Graf G dikatakan *strongly rainbow connected* jika G memiliki suatu *rainbow* $u-v$ *geodesic* untuk setiap dua titik u dan v di G. Dalam kasus ini, pewarnaan c dikatakan *strong rainbow coloring* di G. Minimum k yang terdapat pada pewarnaan $c: E(G) \to \{1,2,\cdots,k\}$ sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow connected* dikatakan bilangan *strong rainbow connection* atau *strong rainbow connection number*, $src(G)$, di G. Suatu *strong rainbow coloring* di G yang menggunakan $src(G)$ warna dikatakan *minimum strong rainbow coloring* di G. Jadi, $rc(G) \leq src(G)$ untuk setiap graf terhubung di G [3]. Selanjutnya, jika G adalah graf terhubung tak *trivial* dengan ukuran m dan $diam(G) = \max\{d(u,v)|u,v \in V(G)\}$, maka

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m. \tag{1.1}$$

Pada paper ini akan dikaji tentang bilangan *strong rainbow connection* untuk graf Roda dan graf Kubik.

2. Beberapa Konsep dalam Rainbow Connection

Berikut disajikan kembali proposisi yang membahas tentang graf G dengan ukuran m yang mempunyai nilai $rc(G)$ dan $src(G)$ $1,2$ dan m.

Proposisi 2.1. [3] *Misalkan G suatu graf terhubung tak trivial berukuran m. Maka berlaku*

(1) $rc(G) = src(G) = 1$ jika dan hanya jika G suatu graf lengkap,
(2) $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$,
(3) $rc(G) = src(G) = m$ jika dan hanya jika G suatu graf pohon.

Bukti.

(1) Jika pada graf lengkap G diberikan 1 warna untuk tiap sisi-sisinya, maka untuk setiap dua titik u dan v di G terdapat *rainbow 1-coloring* yang juga merupakan $u-v$ *geodesic*. Jadi G merupakan *rainbow 1-coloring* dan *strong rainbow 1-coloring* sehingga $rc(G) = src(G) = 1$. Jika $rc(G) = scr(G) = 1$ tidak ada dua titik yang tidak bertetangga maka haruslah G merupakan graf lengkap.

(2) Jika $rc(G) = 2$, ini berarti G memiliki suatu *rainbow 2-coloring* yang mengakibatkan setiap dua titik yang tidak bertetangga dihubungkan oleh suatu *rainbow path* dengan panjang 2, maka haruslah $scr(G) \geq 2$. Karena lintasan tersebut merupakan *geodesic*, jadi tidak mungkin $scr(G) > 2$ maka $src(G) = 2$. Sebaliknya, asumsikan $src(G) = 2$. berdasarkan (1) haruslah $cr(G) \leq 2$. karena G bukan merupakan graf lengkap, sehingga $rc(G) = 2$.

(3) Andaikan G bukan graf pohon. Maka G memiliki suatu lingkaran C : $v_1, v_2, \cdots, v_k, v_1$ dimana $k \geq 3$. Maka $(m-1)-$ *coloring* terhadap sisi-sisi G yang memberikan 1 untuk sisi v_1v_2 dan v_2v_3, dan memberikan $(m-2)$ buah warna berbeda dari himpunan warna $\{2,3,\cdots,m-1\}$ untuk $m-2$ sisi tesisa di G adalah *rainbow coloring*. Jadi, $rc(G) \leq m-1$. Selanjutnya misalkan G

adalah graf pohon dengan ukuran m. Asumsikan bahwa $rc(G) \leq m-1$. Misalkan c adalah suatu *minimum rainbow coloring* di G. Maka terdapat sisi e dan f sehingga $c(e) = c(f)$. Asumsikan tanpa mengurangi perumuman, bahwa $e = uv$ dan $f = xy$, dan G memiliki suatu $u - y$ *path* $u, v, \cdots, x, y$. Maka tidak terdapat *rainbow* $u - y$ *path* di G, kontradiksi dengan G mempunyai *rainbow coloring*. Jadi, haruslah G adalah graf pohon berukuran m. □

Proposisi 2.2. [3] *Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan banyak titik n, dimana $n \geq 4$ maka $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.*

Bukti. Misalkan terdapat graf lingkaran C_n, dimana

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_1\},$$
$$E(C_n) = \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_1 v_n\}.$$

Pandang dua kasus berikut.
Kasus 1. n genap.
Misalkan $n = 2k$ untuk bilangan bulat $k \geq 2$ maka jelas bahwa

$$src(C_n) \geq rc(C_n) \geq diam(C_n) = k.$$

Selanjutnya, konstruksikan pewarnaan sisi c dari C_n sebagai berikut.

$$c(e_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq k; \\ i - k, & \text{untuk } k+1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan pertidaksamaan 1.1, berlaku $rc(C_n) \leq src(C_n) \leq k$, sehingga $rc(C_n) = src(C_n) = k$.
Kasus 2. n ganjil.
Misalkan $n = 2k+1$ untuk bilangan bulat $k \geq 2$. Konstruksikan pewarnaan sisi f dari C_n dengan

$$f(e_i) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq k+1; \\ i - k - 1, & \text{untuk } k+2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Karena f adalah *strong rainbow* $(k+1)$-*coloring* dari C_n maka $rc(C_n) \leq src(C_n) \leq k+1$. Karena $rc(C_n) \geq diam(C_n) = k$ maka $rc(C_n) = k$ atau $rc(C_n) = k+1$. Selanjutnya, klaim bahwa $rc(C_n) = k+1$. Andaikan $rc(C_n) = k$. Misalkan f' adalah suatu *rainbow k-coloring* dari C_n. Selanjutnya, misalkan P adalah lintasan dari u ke v pada C_n. Maka P adalah lintasan *u-v geodesic* di C_n, sehingga P adalah *rainbow path*, sementara *u-v path* lainnya di C_n bukan *rainbow path* karena memiliki panjang $k+1$.

Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $f'(v_{k+1}v_{k+2}) = k$. Pandang titik-titik v_1, v_{k+2} dan v_{k+2}. Karena lintasan $v_1 - v_{k+1}$ *geodesic* $P : v_1, v_2, \cdots, v_{k+1}$ adalah *rainbow path* dan lintasan $v_1 - v_{k+2}$ *geodesic*, $Q : v_1, v_n, \cdots v_{n-1}, v_{k+2}$ adalah *rainbow path*, maka beberapa sisi di P dan Q dapat diwarnai dengan warna k. Karena $v_2 - v_{k+2}$ *geodesic*, $v_2, v_3, \cdots, v_{k+2}$ adalah *rainbow path* maka $f'(v_1v_2) = k$. Dengan cara yang sama, $v_n - v_{k+1}$ *geodesic*, $v_n, v_{n-1}, v_{n-2} \cdots v_{k+1}$ sehingga $f'(v_nv_1) = k$ diperoleh $f'(v_1v_2) = f'(v_nv_1) = k$. Ini berarti, tidak terdapat *raibow* $v_2 - v_n$ *path* di

G. Ini kontradiksi dengan f' adalah suatu *rainbow k-coloring* dari C_n. Jadi, haruslah $rc(C_n) = src(C_n) = k + 1$. □

Proposisi 2.3. [3] *Untuk $n \geq 3$, bilangan rainbow connection dari graf roda (W_n) adalah*

$$rc(W_n) = \begin{cases} 1, & \textit{untuk } n = 3; \\ 2, & \textit{untuk } 4 \leq n \leq 6; \\ 3, & \textit{untuk } n \geq 7. \end{cases}$$

Bukti. Misalkan W_n terdiri dari n-cycle, $C_n : \{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{(n+1)} = v_1\}$ dan v adalah titik lain yang terhubung pada setiap titik di C_n. Karena $W_3 \simeq K_4$, maka berdasarkan Proposisi 2.1, diperoleh bahwa $rc(W_3) = 1$. Misalkan $c(e)$ adalah pewarnaan pada suatu graf G. Untuk $4 \leq n \leq 6$, W_n bukan merupakan graf lengkap, sehingga $rc(W_n) \geq 2$. Definisikan pewarnaan $c : E(W_n) \to \{1, 2\}$ sebagai berikut.

$$c(v_i v) = \begin{cases} 1, \, i \text{ ganjil} \\ 2, \, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 1, \, i \text{ ganjil} \\ 2, \, i \text{ genap} \end{cases}$$

Diperoleh bahwa $rc(W_n) = 2$ untuk $4 \leq n \leq 6$.
Untuk $n \geq 7$ terdapat 3-pewarnaan $c : E(W_n) \to \{1, 2, 3\}$, yang didefinisikan oleh:

$$c(v_i v) = \begin{cases} 1, \, i \text{ ganjil} \\ 2, \, i \text{ genap} \end{cases}$$

$$c(e) = 3, \text{ untuk setiap } e \in E(C_n).$$

Diperoleh bahwa $rc(W_n) \leq 3$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $rc(W_n) \geq 3$. Karena W_n bukan merupakan suatu graf lengkap, maka $rc(W_n) \geq 2$. Asumsikan sebaliknya $rc(W_n) = 2$. Misalkan c adalah 2-pewarnaan pada W_n, dan asumsikan $c(v_1 v) = 1$. Untuk setiap i dengan $4 \leq i \leq n - 2$, terdapat lintasan $v_1 - v_i$ dengan panjang 2 pada graf W_n, sehingga $c(v_i v) = 2$ untuk setiap $4 \leq i \leq n - 2$. Karena $c(v_4 v) = 2$, maka $c(v_n v) = 1$, demikian pula untuk $c(v_3 v) = 2$ saling berhadapan dengan $c(v_{(n-1)} v) = 1$. Karena $c(v_{(n-1)} v) = 1$ maka $c(v_2 v) = 2$, sehingga ditemukan dua sisi yang berdekatan dengan warna yang sama $c(v_2 v) = 2$ dan $c(v_5 v) = 2$, yang mengakibatkan lintasan $v_2 - v_5$ bukan merupakan *rainbow connection* pada graf W_n. Karena itu, $rc(W_n) = 3$ untuk $n \geq 7$. □

Teorema berikut menyajikan bilangan *strong rainbow connection* untuk graf roda dan graf kubik.

Proposisi 2.4. [3] *Bilangan strong rainbow connection dari graf roda adalah $src(W_n) = \lceil n/3 \rceil$ dengan $n \geq 3$.*

Bukti. Misalkan W_n terdiri dari n lingkaran, $C_n : \{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1} = v_1\}$ dan v adalah titik lain yang terhubung pada setiap titik lain di C_n. Karena $W_3 \simeq K_4$, maka berdasarkan Proposisi 2.1, $src(W_3) = 1$. Untuk $4 \leq n \leq 6$, diperoleh bahwa $rc(W_n) = 2$, sehingga berdasarkan Proposisi 2.1, jelas bahwa $src(W_n) = 2$. Maka $src(W_n) = \lceil n/3 \rceil$ untuk $4 \leq n \leq 6$.

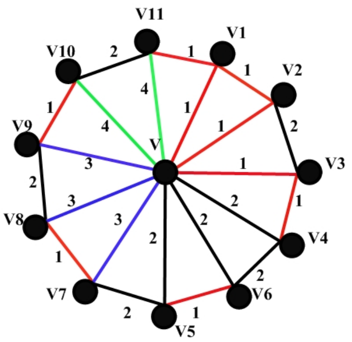
Selanjutnya untuk $n \geq 7$, terdapat k bilangan bulat sedemikian sehingga $3k - 2 \leq n \leq 3k$. Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa $src(W_n) \geq k$. Asumsikan kontradiksi yaitu $src(W_n) \leq k - 1$. Misalkan c adalah pewarnaan *strong rainbow* $(k-1)$ *coloring* dari W_n. Karena $d(v) = n > 3(k-1)$, maka terdapat $S \subseteq V(C_n)$ dimana $|S| = 4$ dan semua sisi di himpunan $uv|u \in S$ berwarna sama. Akibatnya, terdapat dua sisi $u^{'} - u^{"} \in S$ dimana $d_{C_n}(u^{'}, u^{"}) \geq 3$ dan $d_{W_n}(u^{'}, u^{"}) = 2$. Karena $u^{'}, v, u^{"}$ hanya $u^{'}, u^{"}$ *geodesic* di W_n, maka terdapat *rainbow* $u^{'} - u^{"}$ yang bukan *geodesic* di W_n. Jadi $src(W_n) \geq k$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $src(W_n) \leq k$. Definisikan pemetaan strong rainbow k coloring $c : E(W_n) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ dari W_n yaitu sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = v_i v_{i+1}, i \text{ bilangan ganjil} \\ 2, & \text{jika } e = v_i v_{i+1}, i \text{ bilangan genap} \\ j+1, & \text{jika } e = v_i v, i \in \{3j+1, 3j+2, 3j+3;\} \\ & \text{untuk } 0 \leq j \leq k-1. \end{cases}$$

Dapat dilihat bahwa terdapat lintasan $u - v$ *geodesic*. Oleh karena itu, diperoleh $src(W_n) = k = \lceil n/3 \rceil$ untuk $n \geq 7$. □

Pada Gambar 1 diberikan ilustrasi bilangan *strong rainbow connection* graf roda dengan $n = 7$.



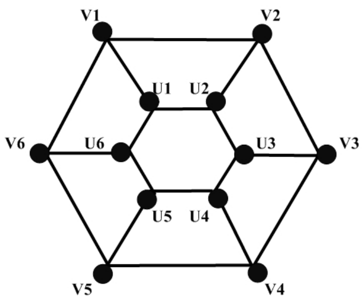
Gambar 1. Strong rainbow connection untuk graf roda

Pada kajian ini akan ditentukan bilangan *rainbow connection* dan bilangan *strong rainbow connection* dari graf kubik C^n yang dapat direpresentasikan menjadi tepat dua lingkaran yang saling lepas (*two disjoint cycle*). Karena graf kubik tersebut memuat tepat dua lingkaran yang saling lepas maka banyak titik dari graf kubik C^n adalah genap, yaitu $n = 2m$ untuk suatu bilangan asli $m \geq 3$. Jelas bahwa graf kubik adalah graf yang setiap titiknya berderajat tiga (3-reguler). Perhatikan dua graf lingkaran dalam C_m^d dan graf lingkaran luar C_m^l dengan masing-masing $m \geq 3$ titik. Misalkan himpunan titik lingkaran dalam adalah $V(C_m^d) := \{v_1, v_2, \cdots, v_m u_{m+1} = v_1\}$ dan himpunan titik lingkaran luar adalah $V(C_m^l) := \{u_1, u_2, \cdots, u_m u_{m+1} = u_1\}$. Jadi, jumlah titik setiap graf kubik adalah genap yaitu $|V(C^n)| = 2m$ untuk suatu bilangan asli $m \geq 3$. Teorema berikut memperlihatkan bilangan *rainbow connection* dan bilangan *strong rainbow connection* dari graf kubik C^n dengan $n = 2m$ titik.

Teorema 2.5. $\diamondsuit$ *Untuk $n \geq 4$, bilangan rainbow connection dan bilangan strong rainbow connection dari graf kubik C^n yang direpresentasikan dengan dua buah graf lingkaran sehingga $n = 2m$ titik adalah*

$$rc(C^n) = src(C^n) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 4; \\ m/2 + 1, & \text{untuk } m \geq 3, m \text{ genap}, \\ \lceil m/2 \rceil, & \text{untuk } m \geq 3, m \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Bukti. Akan dicari *bilangan rainbow connection* dan *bilangan strong rainbow connection* dari graf kubik. Perhatikan Gambar 2.



Gambar 2. Graf kubik dengan $n = 12$ dan $m = 6$

Dari Gambar 2, misalkan terdapat dua lingkaran dengan m titik, lingkaran luar C_m dengan $V(C_m) = \{v_1, v_2, \cdots, v_6\}$ dari graf kubik, dan lingkaran dalam $C_m^{'}$ dengan $V(C_m^{'}) = \{u_1, u_2, \cdots, u_6\}$ dan $E(C_m) = \{v_i v_{i+1}, u_i u_{i+1}\}$ untuk setiap i di G dengan $1 \leq i \leq m$. Karena $C^4 = K_4$, berdasarkan Proposisi 2.1 maka $rc(C^n) = src(C^n) = 1$. Untuk $n \geq 6$, bilangan *rainbow connection* dan bilangan *strong rainbow connection* dari graf kubik adalah $rc(C^n) = src(C^n) = m/2 + 1$ untuk m genap dan $rc(C^n) = src(C^n) = \lceil m/2 \rceil$ untuk m ganjil. Pandang dua kasus berikut:

Kasus 1. m adalah genap.

Misalkan $m = 2k$ untuk bilangan bulat $k \geq 2$ maka $src(C^n) \geq rc(C^n) \geq$

$diam(C^n) = k + 1$. Definisikan pewarnaan sisi $c(e)$ dari C^n sebagai berikut.

$$c(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq k \\ i-k, & \text{untuk } k+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

$$c(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq k \\ i-k, & \text{untuk } k+1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

$$c(v_iu_i) = k+1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq m.$$

Kasus 1. m adalah ganjil.
Misalkan $m = 2k + 1$ untuk bilangan bulat $k \geq 2$. Definisikan pewarnaan sisi $c(e)$ dari C_n dengan

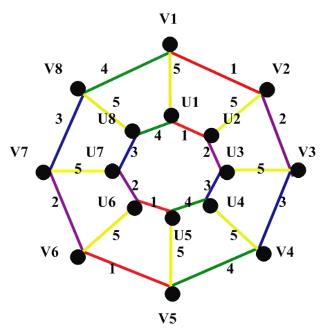
$$c(v_iv_{i+1}) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq k+1 \\ i-k-1, & \text{untuk } k+2 \leq i \leq m. \end{cases}$$

$$c(u_iu_{i+1}) = \begin{cases} i, & \text{untuk } 1 \leq i \leq k+1 \\ i-k-1, & \text{untuk } k+2 \leq i \leq m. \end{cases}$$

$$c(v_iu_i) = \begin{cases} k+1, & \text{jika } e = v_iu_i,\ i \in \{2j, 2j+1\}, \text{ untuk setiap } j = 0; \\ j, & \text{jika } e = v_iu_i,\ i \in \{2j, 2j+1\}, \text{ untuk } 1 \leq j \leq k. \end{cases}$$

Berdasarkan Kasus 1 dan Kasus 2 pada Proposisi 2.3, untuk n genap dan n ganjil sama halnya dengan m genap dan m ganjil yang terdiri dari dua buah lingkaran dalam dan lingkaran luar $m1$ dan $m2$. Setiap titik pada lingkaran dalam dan lingkaran luar dihubungkan oleh satu sisi (v_iu_i), dan terdapat lintasan uv yang bukan *geodesic* jika $rc(C^n) = src(C^n) = k$ untuk m genap. Jadi, haruslah $rc(C^n) = src(C^n) = k + 1$ untuk m genap dan m ganjil. □

Pada Gambar 3 diberikan ilustrasi bilangan *rainbow connection* dan bilangan *strong rainbow connection* pada graf kubik $n = 16$ dan $m = 8$.



Gambar 3. Graf kubik dengan $n = 16$ dan $m = 8$

3. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah diperoleh bilangan *rainbow connection* dan bilangan *strong rainbow connection* untuk graf roda dan graf kubik.

4. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, Dr. Muhafzan, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, dan Ibu Dr. Lyra Yulianti yang telah memberikan masukan dan saran sehingga tulisan ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Chartrand, G. dan P. Zhang, 2006. *Introduction to Graph Theory*, McGraw-Hill International Editions, Singapore.

[2] Syafrizal Sy, Gema Histamedika dan Lyra Yulianti, 2013. Rainbow Connection Numbers of fan and sun, *Applied Mathematical Sciences* **7**: 3155 – 3159.

[3] Chartrand, G. dkk, 2008. Rainbow Connection in Graphs, *Math. Bohem.* **133** : 85 – 98.

[4] Xveliang Li and Yuefang Sun, 2011. Rainbow Connection Number of Line Graphs, *Ars Combin.* **100** : 449 – 463.

[5] Xveliang Li and Yuefang Sun, 2012. *Rainbow Connection of Graphs*, Springer Briefs in Mathematics, New York.