Jurnal Matematika UNAND
Vol. **5** No. **4** Hal. 96 – 104
ISSN : 2303–291X


# SYARAT PERLU DAN SYARAT CUKUP AGAR REPRESENTASI *QUIVER* BERTIPE HINGGA

HITDAYATURAHMI
*Program Studi Magister Matematika,*
*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,*
*Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,*
*email : hitdayaturahmi@gmail.com*

**Abstrak.** Teorema Gabriel, pertama kali dibuktikan oleh Gabriel pada tahun 1972 dan terdiri dari dua bagian. Bagian (i) menyatakan bahwa "Suatu *quiver* $Q$ adalah bertipe hingga jika dan hanya jika setiap komponen *underlying graph* $\widehat{Q}$ adalah suatu diagram *Dynkin simply-laced*" dan Bagian (ii) menyatakan "Misalkan $Q$ suatu *quiver* sedemikian sehingga $\widehat{Q}$ adalah suatu diagram *Dynkin simply-laced.* Dimensi dari suatu representasi tak terdekomposisi (tunggal) dari $Q$ adalah $\underline{n}$ jika dan hanya jika $\underline{n} \in \Phi^{+}$, dimana $\Phi^{+}$ adalah suatu *positive root* dari suatu representasi" [3]. Dalam tulisan ini akan dikaji syarat perlu dan syarat cukup agar representasi *quiver* bertipe hingga. Oleh karena itu, pada kajian ini terlebih dahulu diperkenalkan *quiver* dan teori representasi dengan tujuan membuktikan Teorema Gabriel.

*Kata Kunci*: Coxeter functor,Diagram Dynkin,Representasi Quiver, Root System

## 1. Pendahuluan

Teori representasi lahir untuk memudahkan dalam mempelajari suatu objek matematika yang kompleks dengan cara merepresentasikannya menjadi objek yang lebih sederhana. Sekitar tahun 1940 muncul ide merepresentasikan aljabar dalam bentuk graf dan menjadi sangat berkembang pada tahun 1970-an. Salah satu kajian yang mencakup aljabar dan teori graf dinamakan *quiver*. *Quiver* adalah suatu kajian yang membahas tentang aljabar berdimensi hingga atas lapangan $\mathbb{K}$ yang tertutup secara aljabar yang berkorespondensi dengan suatu graf.

Suatu *quiver* terdiri dari dua himpunan: $Q_0$ yang memuat titik, dan $Q_1$ yang memuat panah serta dua pemetaan $s$ dan $t$. Berbeda dengan kajian *quiver* yang pada dasarnya adalah suatu graf berarah, pada tulisan ini dibahas keterkaitan representasi *quiver* tipe berhingga dengan diagram *Dynkin.* Diagram *Dynkin* adalah suatu graf yang mempunyai titik dan sisi, tanpa melibatkan arah. Fokus tulisan ini adalah syarat perlu dan syarat cukup agar representasi *quiver* bertipe hingga.

## 2. Beberapa Konsep

### 2.1. *Representasi* Quiver

**Definisi 2.1.** [*1*] *Suatu quiver adalah suatu graf berarah yang terdiri dari pasangan dua himpunan yaitu* $Q_0$ *yang memuat titik, dan* $Q_1$ *yang memuat panah serta dua* *pemetaan $s, t : Q_1 \to Q_0$ yang memetakan setiap panah $\alpha \in Q_1$ ke titik asalnya yaitu $s(\alpha)$ dan ke titik targetnya $t(\alpha)$ di $Q_0$.*

Suatu *quiver* $Q$ dikatakan hingga jika $Q_0$ dan $Q_1$ adalah himpunan hingga. Suatu *Underlying graph* $\widehat{Q}$ dari *quiver* $Q$ adalah suatu graf yang didapat dengan menghilangkan arah pada panah-panahnya. Jika $\widehat{Q}$ merupakan suatu graf terhubung maka *quiver* $Q$ dikatakan terhubung.

**Definisi 2.2.** [4] *Misalkan $Q$ adalah suatu quiver berhingga. Suatu representasi $V$ dari $Q$ adalah suatu jumlah langsung dalam dari $\mathbb{K}$-ruang vektor berdimensi hingga*

$$\oplus_{x \in Q_0} V_x,$$

*bersama dengan himpunan dari $\mathbb{K}$-pemetaan linear*

$$\{v_a : V_{s(a)} \to V_{t(a)} | a \in Q_1\}.$$

Jadi, suatu representasi $V$ dari suatu *quiver* $Q$ dapat ditulis

$$V := (\oplus_{x \in Q_0} V_x, \{v_a\}_{a \in Q_1}).$$

Misalkan $Q$ adalah suatu *quiver*. Misalkan $V = (V_1, \cdots, V_n)$ adalah representasi dari *quiver* $Q$. Dimensi dari suatu representasi $V$ dengan dimensi $\underline{n}$ didefinisikan

$$\underline{n} = (n_x)_{x \in Q_0}, \text{ untuk } n_x \in N.$$

**Definisi 2.3.** [4] *Misalkan $V$ dan $W$ adalah representasi dari suatu quiver $Q$. Suatu* ***morphisma*** *$\phi : V \to W$ merupakan koleksi dari $\mathbb{K}$-pemetaan linear*

$$\{\phi_x : V_x \to W_x | x \in Q_0\},$$

*sedemikian sehingga koleksi dari $\mathbb{K}$-pemetaan linear untuk setiap $a \in Q_1$ pada diagram berikut komutatif*

$$\begin{tikzcd} V_{s(a)} \arrow[r, "V_a"] \arrow[d, "\phi_{s(a)}"'] & V_{t(a)} \arrow[d, "\phi_{t(a)}"] \\ W_{s(a)} \arrow[r, "W_a"'] & W_{t(a)} \end{tikzcd}$$

Pemetaan $\phi$ dikatakan suatu *isomorfisma* jika dan hanya jika $\phi_x$ adalah *invertible* untuk setiap $x \in Q_0$. Jika $\phi : V \to W$ adalah suatu *isomorfisma*, maka $V$ dan $W$ dikatakan *isomorfik*, dan disimbolkan dengan $V \cong W$.

**Definisi 2.4.** [5] *Misalkan $V$ dan $W$ adalah dua representasi dari quiver $Q$. Jumlah langsung dalam dari $V \oplus W$ adalah*

$$(V \oplus W)_x := V_x \oplus W_x,$$

*untuk setiap titik $x \in Q_0$ dan*

$$(v \oplus w)_a := v_{s(a)} \oplus w_{s(a)} \to v_{t(a)} \oplus w_{t(a)},$$

*untuk setiap* $a \in Q_1$.

Suatu representasi $U$ dari $Q$ dikatakan terdekomposisi (*decomposable*) jika dan hanya jika

$$U \cong V \oplus W,$$

dimana $V$ dan $W$ adalah suatu representasi tak nol dari $Q$. Jika suatu representasi tak nol tidak terdekomposisi, maka representasi tersebut dikatakan tak terdekomposisi (*indecomposable*).

**Definisi 2.5.** [4] *Suatu quiver* $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ *dikatakan bertipe orbit hingga (bertipe hingga) jika dan hanya jika* $Q$ *mempunyai kelas isomorfisma berhingga dari representasi tak terdekomposisi (untuk suatu dimensi adalah* $\underline{n}$*).*

**Definisi 2.6.** [4] *Misalkan* $Q$ *adalah suatu quiver dan misalkan* $\underline{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_t)$ *dimana* $t = |Q_0|$. *Ruang representasi dari* $Q$ *dengan dimensi* $\underline{n}$ *adalah ruang vektor*

$$rep_{\mathbb{K}}(Q, \underline{n}) := \bigoplus_{a \in Q_1} Hom(\mathbb{K}^{n_{s(a)}}, \mathbb{K}^{n_{t(a)}}).$$

Dimensi ruang representasi dapat ditunjukkan sebagai berikut

$$\dim(rep_{\mathbb{K}}(Q, \underline{n})) := \sum_{a \in Q_1} n_{s(a)} n_{t(a)}.$$

Grup *General Linear* $GL(V)$ dari suatu ruang vektor $V$ atas lapangan $\mathbb{K}$ terdiri dari himpunan semua invers pemetaan linear $\phi : V \to V$. Dimensi $GL(\underline{n})$ adalah

$$\dim(GL(\underline{n})) = \sum_{a \in Q_1} n_x^2.$$

Misalkan $X$ adalah suatu ruang vektor yang sama dengan suatu aksi aljabar dari suatu grup aljabar $G$ dan misalkan $x \in X$, maka

(1) Orbit $O_x$ mempunyai dimensi

$$\dim(O_x) = \dim(G) - \dim(G_x),$$

dimana $G_x$ merupakan *stabilizer* dari $x \in X$.

(2) Orbit closure $\overline{O_x}$ adalah gabungan dari semua orbit yang dimensinya kurang dari dimensi $O_x$.

**Definisi 2.7.** [4] *Bentuk Tit dari suatu quiver* $Q$ *untuk dimensi vektor* $\underline{n}$ *adalah bentuk quadrat dari Euler dan didefinisikan* $q_Q(\underline{n}) := \langle \underline{n}, \underline{n} \rangle$, *sedemikian sehingga*

$$q_Q(\underline{n}) = \sum_{x \in Q_0} n_x^2 - \sum_{a \in Q_1} n_{s(a)} n_{t(a)}.$$

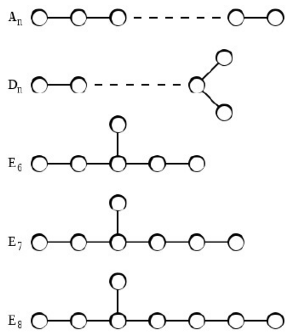
Bentuk Tit dari suatu *quiver* $Q$ hanya pada *underlying graph* $\widehat{Q}$. Misalkan $\widehat{Q}$ adalah suatu *underlying graph* dari suatu *quiver* $Q$ dan misalkan $V$ suatu representasi dari $Q$ dengan dimensi vektor $\underline{n}$. Bentuk Tit dari $Q$ dikatakan definit positif jika

$$q_Q(\underline{n}) > 0$$

untuk setiap tak nol $\underline{n} = (n_x)_{x \in Q_0}$.

### 2.2. *Diagram* Dynkin

Diagram *Dynkin* ditemukan oleh seorang matematikawan Uni Soviet yang bernama Eugene Dynkin. Diagram *Dynkin* merupakan suatu graf yang terdiri dari titik dan sisi dimana di antara dua titik dihubungkan satu atau lebih sisi. Graf *Dynkin* yang diantara dua titik hanya dihubungkan satu sisi disebut *simply-laced* (atau *single-laced*). Graf *Dynkin simply-laced* dibedakan atas lima tipe, yaitu: Syarat graf *Dynkin*




Gambar 1. Diagram Dynkin

tipe $A_n$ dan tipe $D_n$ secara berurutan masing-masingnya adalah $n \geq 1$ dan $n \geq 4$ dimana $n$ adalah banyaknya titik pada graf.

## 3. Teorema Gabriel

Teorema Gabriel menghubungkan suatu karakteristik kelas isomorfisma berhingga dari representasi dengan menetapkan suatu vektor dimensi dan *root system* dari representasi tak terdekomposisi suatu *quiver* $Q$.

**Definisi 3.1.** [4] *Setiap quiver $Q$ mempunyai suatu representasi*

$$Z = (\oplus_{x \in Q_0} Z_x, \{z_a\}_{a \in Q_1})$$

*dengan $Z_x = 0$ untuk setiap $x \in Q_0$ dan $z_a = 0$ untuk setiap $a \in Q_1$ dikatakan sebagai representasi nol (zero representation).*

Suatu representasi tak nol $V$ dari $Q$ dikatakan *irreducible* (representasi sederhana) jika subrepresentasi dari $V$ adalah representasi nol dan $V$ itu sendiri. Representasi *irreducible* dapat didefinisikan sebagao berikut.

$$E^x = (\oplus_{y \in Q_0} {E_y}^x, \{{e_y}^x\}_{a \in Q_1}).$$

Untuk setiap $y \in Q_0$, didefinisikan ruang vektor ${E_y}^x$ berikut

$${E_y}^x = \begin{cases} \mathbb{K}, \& \text{ jika } y = x, \\ 0, \& \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Misalkan ${e_a}^x$ merupakan *zero map* atau pemetaan nol untuk setiap $a \in Q_1$. Dimensi dari ruang vektor ${E_y}^x$ adalah

$$\underline{e_y}^x = \begin{cases} 1, & \text{jika } y = x \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Dimensi dari representasi *irreducible* $E^x$ dapat ditulis $\underline{e}^x := \sum_{y \in Q_0} \underline{e_y}^x$.

Jika $\underline{e}^x \in E \backslash \{0\}$ maka refleksi $s^x := s^{\underline{e}^x} : E \to E$, dikatakan refleksi sederhana (*simple reflection*), pada hyperplane orthogonal untuk $\underline{e}^x$ didefinisikan sebagai berikut

$$s^x(\underline{e}^y) = \underline{e}^y - \frac{2(\underline{e}^y, \underline{e}^x)}{(\underline{e}^x, \underline{e}^x)} \underline{e}^x = \begin{cases} -\underline{e}^x, & \text{jika } y = x,\ y \in Q_0 \\ \underline{e}^x + \underline{e}^y, & \text{jika } x, y \text{ terhubung pada satu sisi,} \\ \underline{e}^y, & \text{untuk } x, y \text{ lainnya.} \end{cases}$$

**Definisi 3.2.** [*4*] *Suatu root system $\Phi$ merupakan himpunanan bagian dari $E$ sedemikian sehingga*

*(i) $\Phi$ berhingga, $\Phi$ membangun ruang vektor $E$ dan $0 \in \Phi$;*
*(ii) jika $\underline{e}^x \in \Phi$ maka $\mathbb{R}\underline{e} \cap \Phi = \underline{e}^x, -\underline{e}^x$;*
*(iii) jika $\underline{e}^x \in \Phi$ maka $s^x\Phi = \Phi$;*
*(iv) jika $\underline{e}^x, \underline{e}^y \in \Phi$ maka $2\frac{\underline{e}^y, \underline{e}^x}{\underline{e}^x, \underline{e}^x} \in \mathbb{Z}$.*

*Anggota dari $\Phi$ disebut* roots.

Suatu himpunan bagian $\prod$ dari suatu *root system* $\Phi$ dikatakan suatu basis (sistem sederhana) jika

(i) $\prod$ merupakan suatu basis ruang vektor yang membangun $\Phi$;
(ii) Setiap anggota dari $\Phi$ merupakan suatu kombinasi linear dari anggota $\prod$ dimana semua koefisien mempunyai tanda yang sama, untuk semua *roots* $\underline{e}^y \in \Phi$ dapat ditulis

$$\underline{e}^y = \sum_{\underline{e}^x \in \prod} k_{\underline{e}^x} \underline{e}^x,$$

dimana semua $k_{\underline{e}^x}$ bilangan bulat tak negatif ($\underline{e}^y$ suatu *positive root*), atau semua $k_{\underline{e}^x}$ bilangan bulat tak positif ($\underline{e}^y$ suatu *negative root*) dan $\underline{e}^x \in \prod$.

Anggota dari $\prod$ disebut *simple roots*.

Himpunan *positive root* dilambangkan dengan $\Phi^+$, dan himpunan *negative root* dilambangkan dengan $\Phi^-$, maka diperoleh *root system* $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$. Setiap *root system* $\Phi$ mempunyai suatu basis $\prod$.

Suatu titik $x \in Q_0$ dikatakan

(i) Sink, jika $s(a) \neq x$ untuk setiap $a \in Q_1$;
(ii) Source, jika $t(a) \neq x$ untuk setiap $a \in Q_1$.

$x \in Q_0$ adalah suatu *sink* dan $Q' = s^*Q$, dikatakan sebagai *Coxeter functor* bagian kiri jika

$$C_x^+ : rep_{\mathbb{K}}(Q) \to rep_{\mathbb{K}}(Q'),$$

dan $x \in Q'_0$ adalah suatu *source* dan $Q = s^*Q'$, dikatakan sebagai *Coxeter functor* bagian kanan jika

$$C_x^- : rep_{\mathbb{K}}(Q') \to rep_{\mathbb{K}}(Q).$$

**Definisi 3.3.** [4] *Misalkan $Q$ suatu quiver dan barisan titiknya $1, \cdots, t$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in Q_1$, terdapat $s(a) > t(a)$. Definisikan barisan refleksi quiver*

$$c = c^+ := s^t s^{t-1} \cdots s^2 s^1,$$
$$c^- := c^{-1} = s^1 s^2 \cdots s^t,$$

*dimana $s^x, x \in Q_0$ adalah refleksi pada $Q$. Barisan $c$ dikatakan* Coxeter transformation.

Misalkan $Q$ suatu *quiver* dan misalkan $V \in rep_{\mathbb{K}}(Q)$ adalah suatu representasi tak terdekomposisi. Andaikan bahwa barisan $x_1, \cdots, x_t$ dari titik $(+)$-*admissible* dengan memperhatikan arah dari $Q$. Himpunan $V_k := C^+_{x_k} \circ \cdots \circ C^+_{x_1}(V)$ dan $\underline{m}_k := s^{x_k} \cdots s^{x_1}\underline{n}$ untuk setiap $0 \leq k \leq t$.Jika $i$ adalah indeks sedemikian sehingga $\underline{m}_k > 0$ untuk $k \leq i$, maka

(i) Setiap $V_k$ adalah suatu representasi tak terdekomposisi dari $Q$ untuk $k \leq i$ dan $V = C^-_{x_1} \circ \cdots \circ C^-_{x_k}(V_k)$;
(ii) Jika $i < t$, maka
   (a) $V_{i+1} = V_{i+2} = \cdots = V_t = 0$.
   (b) $V_i = E^{i+1}$.
   (c) $V = C^-_{x_1} \circ \cdots \circ C^-_{x_k}(E^{i+1})$.

Pernyataan di atas sama halnya untuk barisan $(-)$-*admissible*.

**Definisi 3.4.** [4] *Misalkan $Q$ suatu quiver dengan* underlying graph $\widehat{Q}$ *suatu diagram* Dynkin *dari tipe ADE. Andaikan bahwa $\underline{n}$ adalah dimensi tak nol. Maka*

*(i) $c\underline{n} \neq \underline{n}$.*
*(i) Terdapat suatu $k \in N$ sedemikian sehingga $c^k\underline{n}$ tidak positif.*

Berikut adalah teorema Gabriel beserta bukti teorema tersebut.

**Teorema 3.5.** [4]

*(1) Suatu* quiver *$Q$ adalah bertipe hingga jika dan hanya jika setiap komponen* underlying graph $\widehat{Q}$ *adalah suatu diagram* Dynkin simply-laced.
*(2) Misalkan $Q$ suatu* quiver *sedemikian sehingga $\widehat{Q}$ adalah suatu diagram* Dynkin simply-laced. *Dimensi dari suatu representasi tak terdekomposisi (tunggal) dari $Q$ adalah $\underline{n}$ jika dan hanya jika $\underline{n} \in \Phi^+$, dimana $\Phi^+$ adalah suatu* positive root *dari suatu representasi.*

**Bukti.**

(i) ($\Rightarrow$) Misalkan $Q$ adalah suatu *quiver* bertipe hingga (diasumsikan semua *quiver* terhubung dan $Q$ hanya terdiri dari satu komponen). Maka $Q$ mempunyai kelas *isomorfisma* berhingga dari representasi tak terdekomposisi untuk suatu dimensi vektor $\underline{n}$ dan $rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})$ mempunyai orbit berhingga dari $GL(\underline{n})$. Orbit berhingga ditunjukkan dengan $O_1,\cdots,O_l$, dengan *closure* dari setiap $O_i$ disimbolkan dengan $\overline{O_1},\cdots,\overline{O_l}$. Karena *closure* $\overline{O}$ dari suatu orbit $O$ adalah gabungan dari orbit itu sendiri bersama dengan orbit yang dimensinya kurang dari dimensi $O$, maka $O_i \subseteq \overline{O_i}$, untuk setiap $i = 1,\cdots,l$. Setiap titik dari $rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})$ mempunyai suatu orbit, dan karena $rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})$ terdiri dari gabungan titik yang tak berhingga, maka:

$$rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n}) = \bigcup_{i=1}^{l} O_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{l} \overline{O}_i.$$

Ruang representasi di atas berhingga karena mempunyai orbit yang berhingga. Akan tetapi, karena *orbit closure* dimuat pada $rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})$ maka:

$$rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n}) = \bigcup\nolimits_{i=1}^{l} \overline{O}_i.$$

Misalkan $O_p$ adalah *orbit closure* $\overline{O}_p$ yang sama dengan $rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})$, untuk setiap titik $p \in rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})$. Misalkan $G := GL(\underline{n})$. Sehingga:

$$\dim(rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})) = \dim(\overline{O}_p) = \dim(O_p),$$

dan

$$\dim(O_p) = \dim(G) - \dim(G_p).$$

$G_p$ merupakan *stabilizer* dari $p$, $id \in G_p$, maka $\dim(G_p) \geq 1$, dan juga

$$\dim(rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})) < \dim(G),$$

yang ekivalen dengan,

$$\dim(rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})) \leq \dim(PGL(\underline{n})).$$

Karena $\dim(PGL(\underline{n})) = \dim(GL(\underline{n})) - 1$, maka

$$\begin{aligned} 0 &\leq \dim(PGL(\underline{n})) - \dim(rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})) \\ &= \dim(G) - 1 - \dim(rep_{\mathbb{K}}(Q,\underline{n})) \\ &= \sum_{x\in Q_0} n_x^2 - 1 - \sum_{a\in Q_1} n_{s(a)}n_{t(a)} \\ &= q_Q(\underline{n}) - 1 \\ q_Q(\underline{n}) &\geq 1. \end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa suatu *underlying graph* adalah suatu diagram *Dynkin simply-laced*.
($\Leftarrow$) Jika $Q$ adalah suatu *quiver* sedemikian sehingga $\widehat{Q}$ adalah tipe $ADE$, maka $\underline{n}$ adalah dimensi dari suatu representasi tak terdekomposisi (tunggal) hanya jika $\underline{n} \in \Phi^+$, dan karena terdapat bilangan berhingga dari $\underline{n}$ (karena $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ adalah berhingga) maka terdapat suatu bilangan berhingga

dari kelas isomorfisma dari representasi tak terdekomposisi dari $Q$, dan juga $Q$ adalah tipe berhingga.

(ii) ($\Rightarrow$) Akan ditunjukkan bahwa $V \in rep_{\mathbb{K}}(Q)$ adalah suatu representasi tak terdekomposisi dari suatu quiver $\widehat{Q}$ dari diagram *Dynkin* tipe ADE dengan dimensi vektor $\underline{n}$, maka $\underline{n}$ merupakan suatu *root*.

Misalkan $V$ suatu representasi. Pilih suatu $x_1, \cdots, x_t$ dari titik-titik yang terdapat pada $Q$ sedemikian sehingga untuk sisi $a \in Q_1, s(a) > t(a)$ berlaku

$$c = s^{x_t} s^{x_{t-1}} \cdots s^{x_2} s^{x_1}.$$

Karena $\underline{n}$ adalah dimensi vektor tak nol maka terdapat suatu $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $c^k \underline{n}$ tidak positif. Jika diketahui barisan (+)-*admissible*

$$y_1, y_2, \cdots, y_{tk} = (x_1, \cdots, x_t, x_1, \cdots, x_t, x_1, \cdots, x_t) \text{ sebanyak } k \text{ kali},$$

maka

$$s^{y_{tk}} \cdots s^{y_1} \underline{n} = c^k \underline{n} \not> 0.$$

Barisan di atas adalah (+)-*admissible* dengan memperhatikan arah dari $Q$ sehingga terdapat suatu indeks $i < tk$ (yang hanya bergantung pada dimensi vektor $\underline{n}$ sedemikian sehingga

$$V = C^-_{y_1} \circ \cdots \circ C^-_{y_i}(E^{i+1}),$$

dan

$$\underline{n} = s^{y_1} \cdots s^{y_i}(\underline{e}^{i+1}).$$

Selanjutnya, dimensi vektor $\underline{n}$ adalah *positive root*, dan $V$ ditentukan oleh $\underline{n}$.

($\Leftarrow$) Misalkan $\underline{r}$ suatu *positive root*. Diketahui barisan

$$s^1 \underline{r}, s^2 s^1 \underline{r}, s^3 s^2 s^1 \underline{r}, \cdots.$$

Misalkan $i$ adalah indeks, maka

$$\underline{r}' := s^i s^{1_1} \cdots s^1 \underline{r} > 0.$$

Barisan di atas mempunyai suatu *negative root* dan $\underline{r}'$ adalah unsur yang terdapat pada barisan tersebut. Jadi $\underline{r}'$ adalah *positive root* dan $s^{i+1}\underline{r}'$ adalah *negative root*. Akan tetapi, karena refleksi sederhana hanya mengubah satu koordinat, sehingga

$$\underline{r}' = \underline{e}^{i+1},$$

dan

$$s^t s^{t-1} \cdots s^i \underline{r} = \underline{e}^{i+1}.$$

Maka dapat dituliskan

$$V := C^-_1 \circ \cdots \circ C^-_i(E^{i+1})$$

adalah suatu representasi tak terdekomposisi dengan dimensi vektor $\underline{r}$. □

## 4. Kesimpulan

Pada tulisan ini, dibahas keterkaitan antara representasi quiver tak terdekomposisi dengan diagram Dynkin sehingga dapat ditunjukkan syarat perlu dan syarat cukup agar representasi quiver bertipe hingga dengan membuktikan teorema Gabriel.

## 5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, Ibu Dr. Yanita, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Dr Mahdhivan Syafwan yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

## Daftar Pustaka

[1] I. Assem, D. Simson dan A. Skowronski. 2006. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*. Vol. 1. Cambridge University Press : New York.
[2] P.B. Bhattacharya, S.K.Jain, S.R. Nagpaul. 1994. *Basic Abstract Algebra*. Vol. 1. Cambridge University Press : New York.
[3] K. Baur, L. Lamberti, D. Gentinetta dan K. Bolliger. 2009. *Quiver Representation and Gabriel's Theorem.*Presentation for ETH Zurich Department of Mathematics Student Seminars.
[4] C. Emma. 2011. *Representation of Quivers and Gabriel's Theorem.* Level 5M Project: March 24, 2011.
[5] P. Etingof, O. Golberg, S. Hensel, T. Liu, A. Schwendner, E. Yudovina dan D. Vaintrob. 2011. *Introduction to Representation Theory.* Clay Mathematics Institute.