Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **1** Hal. 66 – 73
ISSN : 2303–291X

ANALISIS *LAX PAIR* DAN PENERAPANNYA PADA PERSAMAAN KORTEWEG-DE VRIES

ANCE SATRIA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : satriaance@gmail.com

Abstrak. *Lax pair* adalah pasangan dua operator diferensial yang jika disubstitusikan ke suatu persamaan (dinamakan persamaan *Lax*) akan menghasilkan suatu persamaan diferensial parsial tertentu. Pada makalah ini dibahas konsep *Lax pair* secara umum, baik dalam bentuk operator L dan M maupun dalam bentuk matriks X dan T, serta penerapannya secara khusus pada persamaan Korteweg-de Vries orde lima. Beberapa sifat *Lax pair* juga dibuktikan, yaitu (i) kuantitas $\psi_t - M\psi$, dimana ψ suatu fungsi eigen, merupakan solusi dari persamaan $L\psi = \lambda\psi$, dimana λ suatu nilai eigen, (ii) nilai Trace(T^k) selalu konstan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dan (iii) setiap nilai eigen matriks T bernilai konstan.

Kata Kunci: Lax pair, operator diferensial, persamaan Lax, persamaan Korteweg-de Vries, fungsi eigen, nilai eigen, Trace

1. Pendahuluan

Salah satu kajian menarik yang muncul dalam teori persamaan diferensial adalah konsep tentang *Lax pair*. Pada tahun 1968 [6], Peter Lax mempublikasikan konsep tentang *Lax pair*, dimana *Lax pair* merupakan pasangan dua operator diferensial yang jika disubstitusikan ke suatu persamaan (dinamakan persamaan *Lax*) akan menghasilkan suatu persamaan diferensial tertentu. Jika suatu persamaan diferensial memiliki *Lax pair*, maka hal itu mengindikasikan bahwa persamaan diferensial tersebut bersifat *integrable* (dapat diselesaikan secara eksak). Sejak saat itu *Lax pair* menjadi objek penting dalam analisis suatu sistem *integrable*.

Lax pair terdiri dari operator L, yang bergantung pada $x, u_x, u_{xx}, \cdots$, dan operator M yang bersama-sama merepresentasikan suatu persamaan diferensial parsial $F(x, t, u, u_x, u_t, \cdots) = 0$ ketika disubstitusikan ke persamaan $L_t = [M, L]$ (disebut persamaan *Lax*). Di sini notasi $[M, L]$ didefinisikan sebagai $[M, L] = (ML - LM)$ dan disebut sebagai komutator (*commutator*) dari operator M dan L. Operator M dan L dapat berupa operator skalar atau matriks.

Untuk menghindari keharusan dalam menggunakan operator-operator *Lax* dengan orde yang lebih tinggi, pada tahun 1974, Ablowitz, Kaup, Newell, dan Segur [1] memformulasi suatu matriks untuk *Lax pair*. Metode ini dikenal dengan metode *AKNS*.

Proses menemukan M dan L yang bersesuaian dengan persamaan diferensial yang diberikan, secara umum bersifat tak trivial. Oleh karena itu, jika terlebih dahulu menetapkan L dan M, dan kemudian menentukan persamaan diferensial parsial yang mana yang bersesuaian, terkadang dapat memberikan hasil yang baik. Namun hal ini memerlukan banyak percobaan (*trial*), dan tentu saja bisa tidak mengarah ke solusi yang dikehendaki [6].

Dalam makalah ini akan dibahas konsep Lax pair secara umum dan analisis beberapa sifat terkait yang muncul, kemudian menerapkannya secara khusus pada persamaan Korteweg-de Vries. Kajian tentang masalah ini mengeksplorasi kembali studi pada referensi [4] dan [5].

2. Analisis *Lax Pair*

2.1. *Bentuk Operator*

Misalkan terdapat suatu operator linier L yang bergantung pada fungsi $u(x,t)$, variabel spasial x dan turunan spasial $u_x, u_{xx}, \cdots$, sedemikian sehingga

$$L\psi = \lambda\psi \text{ dengan } \psi = \psi(x,t). \tag{2.1}$$

Pada persamaan (2.1), λ adalah nilai eigen dan ψ adalah fungsi eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ. Selanjutnya misalkan juga terdapat operator lain M, sedemikian sehingga berlaku

$$\psi_t = M\psi. \tag{2.2}$$

Berdasarkan ide yang dikemukakan oleh Ablowitz dan Clarkson [2], syarat kompatibilitas bagi persamaan (2.1) dan (2.2) dapat ditentukan dengan terlebih dahulu menurunkan persamaan (2.1) terhadap waktu t dan kemudian gunakan aturan rantai, sehingga diperoleh

$$L_t\psi + L\psi_t = \lambda_t\psi + \lambda\psi_t. \tag{2.3}$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (2.2) ke persamaan (2.3) sehingga didapatkan

$$\begin{aligned} L_t\psi + LM\psi &= \lambda_t\psi + \lambda M\psi \\ &= \lambda_t\psi + M\lambda\psi. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.1), maka persamaan (2.4) menjadi

$$\begin{aligned} L_t\psi + LM\psi &= \lambda_t\psi + ML\psi \\ \Leftrightarrow (L_t + LM - ML)\psi &= \lambda_t\psi. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Oleh karena itu, agar dapat diperoleh solusi nontrivial fungsi eigen $\psi(x,t)$, haruslah

$$L_t + [L,M] = 0, \tag{2.6}$$

dimana

$$[L,M] = LM - ML \tag{2.7}$$

yang akan bernilai benar jika dan hanya jika $\lambda_t = 0$, atau dengan kata lain λ tidak bergantung pada waktu.

Persamaan (2.6) memberikan syarat kompatibilitas bagi persamaan (2.1) dan (2.2) dan dikenal sebagai *representasi Lax* atau *persamaan Lax* dari persamaan diferensial parsial yang diberikan. Selanjutnya $[L, M]$ pada persamaan (2.7) merepresentasikan komutator dari dua operator L dan M yang membentuk suatu *Lax pair*.

Selanjutnya dari persamaan (2.1) dan persamaan (2.2) diperoleh teorema berikut.

Teorema 2.1. [5] *$\psi_t - M\psi$ merupakan solusi dari persamaan $L\psi = \lambda\psi$ dengan $\psi = \psi(x, t)$.*

Bukti. Dari persamaan (2.1) diperoleh

$$\begin{aligned} L(\psi_t - M\psi) &= L\psi_t - LM\psi \\ &= LM\psi - LM\psi \\ &= 0, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} \lambda(\psi_t - M\psi) &= \lambda\psi_t - \lambda M\psi \\ &= \lambda M\psi - \lambda M\psi \\ &= 0. \end{aligned}$$

Karena $L(\psi_t - M\psi) = \lambda(\psi_t - M\psi) = 0$, maka $\psi_t - M\psi$ merupakan solusi dari persamaan (2.1). □

2.2. *Bentuk Matriks*

Pada tahun 1974, Ablowitz, Kaup, Newell, dan Segur [1] memformulasi suatu matriks untuk *Lax pair* sehingga dapat menghindari keharusan dalam menggunakan operator-operator *Lax* dengan orde yang lebih tinggi. Metode ini juga dikenal sebagai metode *AKNS*. Dalam analisisnya, mereka mengenalkan sistem berikut:

$$D_x\Psi = X\Psi, \tag{2.8}$$

$$D_t\Psi = T\Psi, \tag{2.9}$$

dimana matriks persegi X dan T berturut-turut berkorespondensi dengan operator L dan M, dan Ψ adalah suatu fungsi bernilai vektor. Matriks X dan T pada umumnya bergantung pada nilai eigen λ yang bebas terhadap waktu, sedangkan ukuran dari Ψ bergantung pada orde L. Dengan demikian, jika L berorde 2, maka vektor Ψ akan mempunyai dua elemen, sedangkan X dan T masing-masing adalah matriks berukuran 2×2.

Dengan menggunakan persamaaan (2.7), (2.8), dan (2.9), diperoleh syarat kompatibiltas bagi persaamaan (2.8) dan (2.9), yaitu dengan menghitung

$$\begin{aligned} [D_t, D_x]\Psi &= (D_tD_x - D_xD_t)\Psi \\ &= D_tD_x\Psi - D_xD_t\Psi \\ &= D_t(X\Psi) - D_x(T\Psi) \\ &= (D_tX)\Psi + X(D_t\Psi) - (D_xT)\Psi - T(D_x\Psi) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Persamaan (2.10) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}(D_tX)\Psi + XT\Psi - (D_xT)\Psi - TX\Psi &= \mathbf{0}\\ &\Updownarrow\\ (D_tX)\Psi - (D_xT)\Psi + XT\Psi - TX\Psi &= \mathbf{0}\\ &\Updownarrow\\ (D_tX - D_xT + [X,T])\Psi &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Untuk memperoleh solusi non-trivial bagi fungsi Ψ, maka haruslah

$$D_tX - D_xT + [X,T] = \mathbf{0}, \tag{2.12}$$

yang memberikan syarat kompatibilitas bagi persamaan (2.8) dan (2.9) dan dikenal sebagai *persamaan matriks Lax*. Disini $[X,T]$ didefinisikan dengan

$$[X,T] = XT - TX, \tag{2.13}$$

yang dikenal sebagai komutator matriks.

Jika X tidak bergantung terhadap waktu t, maka persamaan (2.12) menjadi

$$T_x = [X,T], \tag{2.14}$$

yang memberikan *representasi Lax* bagi suatu persamaan stasioner. Pasangan matriks (X,T) disebut pasangan matriks *Lax* untuk suatu persamaan stasioner. Berikut adalah sifat-sifat yang berlaku pada *representasi Lax* (2.14).

Teorema 2.2. [4] *Misalkan (X,T) adalah suatu pasangan matriks Lax untuk suatu persamaan stasioner, maka* $\mathrm{Tr}(T^k)$ *bernilai konstan untuk setiap* $k \in \mathbb{N}$.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $\mathrm{Tr}(T^k)$ terhadap x bernilai konstan dengan menurunkannya terhadap x untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Dengan menggunakan sifat dari trace, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{Tr}(T^k)}{dx} &= \mathrm{Tr}\left(\frac{dT^k}{dx}\right)\\ &= \mathrm{Tr}(T_xT^{k-1} + TT_xT^{k-2} + \cdots + T^{k-1}T_x)\\ &= k\mathrm{Tr}(T_xT^{k-1})\\ &= k\mathrm{Tr}((XT - TX)T^{k-1})\\ &= k\mathrm{Tr}(XT^k - TXT^{k-1})\\ &= k\mathrm{Tr}(XT^k - XT^k)\\ &= k\mathrm{Tr}(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

□

Akibat dari Teorema 2.2 adalah bahwa nilai eigen dari matriks T juga bernilai konstan.

Akibat 2.3. [4] *Misalkan (X,T) adalah pasangan matriks Lax untuk suatu persamaan stasioner, maka λ adalah bernilai konstan untuk setiap $\lambda \in$* $\mathrm{Spec}(T)$.

Bukti. Misalkan matriks T berukuran $n \times n$. Koefisien-koefisien dari polinomial karakteristik matriks T dapat dinyatakan secara rekursif dalam $\mathrm{Tr}(T^k)$ dengan $k = 1, 2, \cdots, n$. Karena Teorema 2.2 menyatakan bahwa $\mathrm{Tr}(T^k)$ bernilai konstan, maka semua koefisien polinomial karakteristik juga bernilai konstan. Perhatikan bahwa setiap akar-akar polinomial dapat dinyatakan sebagai fungsi terhadap koefisien-koefisien polinomialnya. Karena nilai eigen matriks T merupakan akar-akar polinomial karakteristik, dan semua koefisien polinomialnya bernilai konstan, maka nilai eigen matriks T mestilah juga bernilai konstan. □

3. Matriks *Lax Pair* untuk Persamaan Korteweg-de Vries Orde Lima

Pada bagian ini akan dibahas matriks *Lax pair* untuk persamaan Korteweg-de Vries orde lima (KdV5) [5]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 30u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 20 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0,\ u = u(x,t). \tag{3.1}$$

Selain itu juga akan dikonfirmasi sifat-sifat terkait yang dibahas sebelumnya. Pasangan matriks *Lax* untuk persamaan KdV5 (3.1) adalah (X,T) dimana [5]

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ u & 0 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

dan

$$T = \begin{bmatrix} 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} & 6u^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ -\left(6u^3 + 6\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 8u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) & -\left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Untuk menunjukkan bahwa (X, T) adalah pasangan matriks *Lax* untuk persamaan KdV5 (3.1), substitusikan persamaan (3.2) dan persamaan (3.3) ke persamaan matriks *Lax* (2.11). Perhatikan bahwa

$$D_t X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} & 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$D_x T = \begin{bmatrix} 6\frac{\partial u}{\partial x}^2 + 6u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} & 12u\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ -\left(18u^2\frac{\partial u}{\partial x} + 20\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 8u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^5}{\partial x^5}\right) & -\left(6\frac{\partial u}{\partial x}^2 + 6u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya

$$XT = \begin{bmatrix} 6u^3 + 6\frac{\partial u}{\partial x}^2 + 8u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} & 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ u\left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) & u\left(6u^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \end{bmatrix}$$

dan

$$TX = \begin{bmatrix} u\left(6u^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) & -\left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) \\ u\left(-6u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) & 6u^3 + 6\frac{\partial u}{\partial x}^2 + 8u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \end{bmatrix}.$$

Dengan demikian diperoleh

$$\begin{aligned}[X,T] &= XT - TX \\ &= \begin{bmatrix} 6\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 6u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} & 12u\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ u\left(12u\frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right) & -\left(6\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 6u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dari persamaan matriks *Lax* (2.11), didapatkan

$$D_t X - D_x T + [X,T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

dimana

$$c = \frac{\partial u}{\partial t} + 30u^2\frac{\partial u}{\partial x} + 20\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5}.$$

Oleh karena itu, syarat kompatibilitas untuk X dan T haruslah

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 30u^2\frac{\partial u}{\partial x} + 20\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0, \tag{3.4}$$

yaitu persamaan KdV5 (3.1).

Sekarang pandang kasus stasioner dari persaamaan KdV5 (3.1). Dengan menetapkan u tidak bergantung terhadap waktu t, maka persamaan (3.1) menjadi persamaan stasioner

$$30u^2\frac{\partial u}{\partial x} + 20\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 10u\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} = 0. \tag{3.5}$$

Ini berarti bahwa (X,T) merupakan pasanngan matriks *Lax* untuk persamaan stasioner (3.5).

Selanjutnya perhatikan kembali matriks T yang diberikan oleh persamaan (3.3). Dapat dibuktikan bahwa untuk k genap berlaku

$$T^k = \begin{bmatrix} \left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k}{2}} & 0 \\ 0 & \left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k}{2}} \end{bmatrix},$$

dan untuk k ganjil berlaku

$$T^k = \begin{bmatrix} T_{11}\left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k-1}{2}} & T_{12}\left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k-1}{2}} \\ T_{21}\left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k-1}{2}} & -T_{11}\left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k-1}{2}} \end{bmatrix},$$

dimana

$$\begin{aligned} T_{11} &= 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \\ T_{12} &= 6u^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ T_{21} &= -\left(6u^3 + 6\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 8u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right), \\ T_{22} &= -\left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right). \end{aligned}$$

Nilai $\mathrm{Tr}(T^k)$ sebagai berikut:

(i) Untuk k genap,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(T^k) &= \left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k}{2}} + \left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k}{2}} \\ &= 2\left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k}{2}} \\ &= 2\left(d - e\right)^{\frac{k}{2}}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

dimana

$$\begin{aligned} d &= \left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2, \\ e &= \left(6u^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(6u^3 + 6\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 8u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right). \end{aligned}$$

(ii) Untuk k ganjil,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(T^k) &= T_{11}\left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k-1}{2}} + \left(-T_{11}\left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k-1}{2}}\right) \\ &= T_{11}\left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k-1}{2}} - T_{11}\left((T_{11})^2 + T_{12}T_{21}\right)^{\frac{k-1}{2}} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Menurut Teorema 2.2, $\mathrm{Tr}(T^k)$ selalu bernilai konstan (terhadap x) untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Ini berarti bahwa kuantitas di sisi kanan persamaan (3.6) bernilai konstan.

Selanjutnya perhatikan pula bahwa nilai eigen dari matriks T diberikan oleh

$$\lambda_1 = \sqrt{a+b} \quad \text{dan} \quad \lambda_2 = -\sqrt{a+b}, \tag{3.8}$$

dimana

$$\begin{aligned} a &= -36u^5 - 60u^3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 16u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 - 12\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ b &= 12u\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 - 6u^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}. \end{aligned}$$

Berdasarkan Akibat 2.3, ini berarti bahwa kuantitas λ_1 dan λ_2 pada persamaan (3.8) bernilai konstan.

4. Kesimpulan dan Saran

Berdasarkan hasil yang telah didapatkan pada pembahasan sebelumnya maka dapat disimpulkan bahwa:

(1) Kuantitas $\psi_t - M\psi$, dimana ψ suatu fungsi eigen, merupakan solusi dari persamaan $L\psi = \lambda\psi$, dimana λ suatu nilai eigen.
(2) Nilai $\mathrm{Tr}(T^k)$ selalu konstan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.
(3) Setiap nilai eigen matriks T bernilai konstan.

Dalam makalah ini juga telah dibahas secara khusus penerapan *Lax pair* pada persamaan Korteweg-de Vries orde lima dan mengkonfirmasi sifat-sifat terkait yang muncul.

Untuk penelitian selanjutnya, Penulis menyarankan agar mengkaji sifat-sifat lain yang muncul dari *Lax pair* suatu persamaan diferensial parsial, misalnya sifat determinan dari matriks *Lax pair*.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Mahdhivan Syafwan, Ibu Nova Noliza Bakar, Bapak Zulakmal, Bapak Admi Nazra dan Bapak Bukti Ginting yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Ablowitz, M. J., D. J. Kaup, A. C. Newell, and H. Segur. 1974. *The inverse scattering transform - Fourier analysis for nonlinear problems*. Stud. Appl. Math. **53**: 249 – 315.

[2] Ablowitz, M. J. and P. A. Clarkson. 1991. *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (London Mathematical Society Lecture Note Series, 149). Cambridge: Cambridge University Press.

[3] Anton, H. and C. Rorres. 1991. *Aljabar Linier Elementer Edisi Kedelapan-Jilid 1*. Erlangga. Jakarta.

[4] Goriely, A. 2001. *Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[5] Griffiths, G.W. 2012. *Lax Pairs*. City University. UK. www.researchgate.net/publication/270581873_Lax_Pairs [diakses pada tanggal 22 Februari 2016].

[6] Lax, P. 1968. *Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves*. Comm. Pure Applied Math. **21**: 467 – 490.