Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **1** Hal. 83 – 89
ISSN : 2303–291X

STABILISASI SISTEM DESKRIPTOR DISKRIT LINIER POSITIF

LILI ANDRIANI
Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email :liliandriani7@gmail.com

Abstrak. Suatu sistem dikatakan dapat distabilkan jika terdapat kontrol *feedback* $\mathbf{u}_t = K\mathbf{x}_t$ untuk suatu $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga sistem

$$E\mathbf{x}_{t+1} = (A + BK)\mathbf{x}_t,\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_+$$

adalah stabil [4]. Dalam hal ini, vektor $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^m$ dikatakan kontrol yang menstabilkan sistem di atas. Pada makalah ini akan dikaji syarat agar terdapat matriks $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga sistem di atas adalah stabil, positif, dan regular.

Kata Kunci: Stabilisasi, sistem deskriptor, regular, positif, linier, diskrit, invers drazin.

1. Pendahuluan

Diberikan suatu sistem persamaan beda (*difference equations*) linier sebagai berikut:

$$E\mathbf{x}_{t+1} = A\mathbf{x}_t + B\mathbf{u}_t, t \in \mathbb{Z}_+ \tag{1.1}$$

dengan $E, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dan $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Dalam sistem (1.1), $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n$ menyatakan variabel *state* (keadaan), $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^m$ menyatakan variabel kontrol (input) dan $\mathbb{Z}_+$ menyatakan himpunan bilangan bulat non negatif. Sistem (1.1) sering disebut sebagai sistem deskriptor diskrit linier [4]. Sistem (1.1) dikatakan regular jika $rank(E) < n$ dan $\det(\lambda E - A) \neq 0$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$.

Pada dekade terakhir ini, kepositifan solusi dari sistem (1.1) menjadi sorotan berbagai peneliti. Sistem (1.1) dengan $ind(E) = q$ dikatakan positif jika untuk setiap $t \in \mathbb{Z}_+$ dan untuk setiap fungsi input $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^m_+$, berlaku $\mathbf{x}_t \in \mathbb{R}^n_+$. Kriteria tentang kepositifan sistem (1.1) telah dikaji oleh Virnik pada tahun 2008 [4].

Disamping itu, kajian tentang kestabilan sistem (1.1) merupakan topik klasik yang telah dikaji oleh berbagai peneliti. Literatur [6] memuat kajian tentang kestabilan sistem (1.1) tanpa batasan kepositifan. Sistem (1.1) dikatakan stabil jika $\rho_f(E, A) < 1$, dimana $\rho_f(E, A)$ adalah radius spectral dari pasangan matriks (E, A) [6].

Tahun 2008, Virnik [4] mengajukan kriteria untuk kestabilan sistem (1.1) dengan asumsi bahwa sistem (1.1) adalah positif. Tetapi, kriteria Virnik tidak mencakup fenomena berikut, "Jika diberikan sistem (1.1) yang regular, positif, dan tidak stabil, bagaimanakah kriteria agar sistem tersebut dapat distabilkan (*stabilizable*)?"

Sistem (1.1) dikatakan dapat distabilkan jika terdapat kontrol *feedback* $\mathbf{u}_t = K\mathbf{x}_t$ untuk suatu $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga sistem

$$E\mathbf{x}_{t+1} = (A + BK)\mathbf{x}_t,\ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1.2}$$

adalah stabil [4]. Dalam hal ini, vektor $\mathbf{u}_t \in \mathbb{R}^m$ dikatakan kontrol yang menstabilkan sistem (1.1). Pada makalah ini akan dikaji syarat agar terdapat matriks $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga sistem (1.2) adalah stabil, positif, dan regular.

Tahun 2013, telah dibicarakan syarat agar terdapat $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga sistem (1.2) adalah stabil, positif, dan regular untuk kasus sistem deskriptor kontiniu positif linier. Pada tesis ini akan dikaji syarat agar terdapat $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga sistem (1.2) adalah stabil, positif, dan regular untuk kasus sistem deskriptor diskrit positif linier.

2. Sistem Deskriptor Diskrit Linier Positif

Misalkan $E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dengan $ind(E) = q$. Invers Drazin dari E ditulis E^D adalah suatu matriks yang memenuhi:

$$\begin{aligned} E^D E &= E E^D \\ E^D E E^D &= E^D \\ E^D E^{q+1} &= E^q. \end{aligned}$$

Invers Drazin dari suatu matriks persegi E selalu ada dan tunggal [10]. Jika matriks E nonsingular, maka $E^D = E^{-1}$, dimana E^{-1} menyatakan definisi invers matriks dalam pengertian biasa.

Lema 2.1. *[4] Misalkan $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

(1) Jika $AB = BA$, maka

$$AB^D = B^D A, \tag{2.1}$$

$$BA^D = A^D B, \tag{2.2}$$

$$A^D B^D = B^D A^D, \tag{2.3}$$

(2) Jika $AB = BA$ dan $KerA \cap KerB = \mathbf{0}$, maka

$$(I - AA^D)BB^D = I - AA^D. \tag{2.4}$$

Perhatikan kembali sistem deskriptor diskrit (1.1), dengan kondisi awal $\mathbf{x}_0$, dan asumsikan bahwa

$$\det(\lambda E - A) \neq 0, \text{ untuk suatu } \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.5}$$

Dengan mengalikan kedua ruas (1.1) dengan $(\lambda E - A)^{-1}$, maka diperoleh:

$$\hat{E}\mathbf{x}_{t+1} = \hat{A}\mathbf{x}_t + \hat{B}\mathbf{u}_t, t \in \mathbb{Z}_+, \tag{2.6}$$

dimana

$$\hat{E} = (\lambda E - A)^{-1} E, \tag{2.7}$$

$$\hat{A} = (\lambda E - A)^{-1} A, \tag{2.8}$$

$$\hat{B} = (\lambda E - A)^{-1} B. \tag{2.9}$$

Lema 2.2. [6] *Untuk matriks $\hat{E}$ dan $\hat{A}$ yang didefinisikan pada (2.7) dan (2.8), berlaku*

(1) $\hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A}$.
(2) $ker\ \hat{A} \cap ker\ \hat{E} = \boldsymbol{0}$.

Bukti.

(1) Dari (2.7), diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda\hat{E} - \hat{A} &= \lambda(\lambda E - A)^{-1}E - (\lambda E - A)^{-1}A \\ &= (\lambda E - A)^{-1}(\lambda E - A) \qquad (2.10) \\ &= I, \text{ atau} \\ \hat{A} &= \lambda\hat{E} - I. \qquad (2.11) \end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\hat{A}\hat{E} = (\lambda\hat{E} - I)\hat{E} = \hat{E}(\lambda\hat{E} - I) = \hat{E}\hat{A}. \qquad (2.12)$$

(2) Misalkan $\mathbf{x} \in ker\hat{A} \cap ker\hat{E}$. Maka $\hat{A}\mathbf{x} = 0$ dan $\hat{E}\mathbf{x} = 0$, dan $\lambda\hat{E} - \hat{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Karena $\lambda\hat{E} - \hat{A} = I$, maka $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. □

Teorema 2.3. [4] *Misalkan sistem (1.1) adalah regular dengan $ind(E, A) = q$, maka solusi dari sistem (1.1) adalah:*

$$\boldsymbol{x}_t = (\hat{E}^D\hat{A})^t\hat{E}^D\hat{E}\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{t-1}\hat{E}^D(\hat{E}^D\hat{A})^{t-i-1}\hat{B}\boldsymbol{u}_i - (I - \hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{q-1}(\hat{E}\hat{A}^D)^i\hat{A}^D\hat{B}\boldsymbol{u}_{t+i} \qquad (2.13)$$

untuk suatu $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Bukti. Misalkan $\hat{E}$ dan $\hat{A}$ didefinisikan seperti dalam (2.7). Berdasarkan Lema 2.2 berlaku $\hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A}$. Akibatnya, menurut Lema 2.1 diperoleh $\hat{A}\hat{E}^D = \hat{E}^D\hat{A}$. Selanjutnya

$$\begin{aligned} \hat{E}\mathbf{x}_{t+1} &= (\hat{E}^D\hat{A})^{t+1}\hat{E}\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{t}(\hat{E}^D\hat{A})^{t-i}\hat{E}\hat{E}^D\hat{B}\mathbf{u}_i - (I - \hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{q-1}(\hat{E}\hat{A}^D)^{i+1}\hat{B}\mathbf{u}_{t+i+1}, \\ \hat{A}\mathbf{x}_t &= (\hat{E}^D\hat{A})^{t+1}\hat{E}\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{t-1}(\hat{E}^D\hat{A})^{t-i}\hat{B}\mathbf{u}_i - (I - \hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{q-1}(\hat{E}\hat{A}^D)^i\hat{E}^D\hat{B}\mathbf{u}_{t+i} \end{aligned}$$

Berdasarkan Lema 2.2, berlaku $\hat{A}\hat{E} = \hat{E}\hat{A}$ dan $ker\ \hat{A} \cap ker\ \hat{E} = \mathbf{0}$, akibatnya menurut Lema 2.1, $(I-\hat{E}\hat{E}^D)\hat{A}\hat{A}^D = I-\hat{E}\hat{E}^D$, sehingga

$$\begin{aligned}(I-\hat{E}\hat{E}^D)(\hat{E}\hat{A}^D)^q &= (I-\hat{E}\hat{E}^D)\hat{A}\hat{A}^D(\hat{E}\hat{A}^D)^q\\ &= (I-\hat{E}\hat{E}^D)\hat{A}\hat{A}^D\hat{E}^q(\hat{A}^D)^q\\ &= \hat{A}\hat{A}^D\hat{E}^q(\hat{A}^D)^q - \hat{E}\hat{E}^D\hat{A}\hat{A}^D\hat{E}^q(\hat{A}^D)^q\\ &= \hat{A}\hat{A}^D\hat{E}^q(\hat{A}^D)^q - \hat{E}\hat{E}^D\hat{A}\hat{A}^D\hat{E}^D\hat{E}^{q+1}(\hat{A}^D)^q\\ &= \hat{A}\hat{A}^D\hat{E}^q(\hat{A}^D)^q - \hat{A}\hat{A}^D\hat{E}\hat{E}^D\hat{E}^D\hat{E}^{q+1}(\hat{A}^D)^q\\ &= \hat{A}\hat{A}^D\hat{E}^q(\hat{A}^D)^q - \hat{A}\hat{A}^D\hat{E}^D\hat{E}^{q+1}(\hat{A}^D)^q\\ &= \hat{A}\hat{A}^D\hat{E}^q(\hat{A}^D)^q - \hat{A}\hat{A}^D\hat{E}^q(\hat{A}^D)^q = 0.\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk membuktikan bahwa (2.10) merupakan solusi dari (2.6), akan ditunjukkan

$$\hat{E}\mathbf{x}_{t+1} - \hat{A}\mathbf{x}_t = \hat{B}\mathbf{u}(t).$$

$$\begin{aligned}\hat{E}x_{t+1} - \hat{A}\mathbf{x}_t &= \hat{E}\hat{E}^D\hat{B}\mathbf{u}_t - (I-\hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{q-1}[(\hat{E}\hat{A}^D)^{i+1}\hat{B}\mathbf{u}_{t+i+1} + (\hat{E}\hat{A}^D)^i\hat{B}\mathbf{u}_{t+i}]\\ &= \hat{E}\hat{E}^D\hat{B}\mathbf{u}_t - (I-\hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{q-1}[(\hat{E}\hat{A}^D)^{i}\hat{B}\mathbf{u}_{t+i} - (\hat{E}\hat{A}^D)^{i+1}\hat{B}\mathbf{u}_{t+i+1}]\\ &= \hat{E}\hat{E}^D\hat{B}\mathbf{u}_t + (I-\hat{E}\hat{E}^D)[(\hat{B}\mathbf{u}_t - \hat{E}\hat{A}^D)\hat{B}\mathbf{u}_{t+1})\\ &\quad +((\hat{E}\hat{A}^D)\hat{B}\mathbf{u}_{t+1} - (\hat{E}\hat{A}^D)^2\hat{B}\mathbf{u}_{t+2} + \cdots\\ &\quad +(\hat{E}\hat{A}^D)^{q-2}\hat{B}\mathbf{u}_{t+q-2} - (\hat{E}\hat{A}^D)^{q-1}\hat{B}\mathbf{u}_{t+q-1})\\ &\quad +(\hat{E}\hat{A}^D)^{q-1}\hat{B}\mathbf{u}_{t+q-1} - (\hat{E}\hat{A}^D)^{q}\hat{B}\mathbf{u}_{t+q})]\\ &= \hat{E}\hat{E}^D\hat{B}\mathbf{u}_t + (I-\hat{E}\hat{E}^D)[(\hat{B}\mathbf{u}_t - \hat{E}\hat{A}^D)^q\hat{B}\mathbf{u}_{t+q}]\\ &= \hat{E}\hat{E}^D\hat{B}\mathbf{u}_t + (I-\hat{E}\hat{E}^D)\hat{B}\mathbf{u}_t - (I-\hat{E}\hat{E}^D)(\hat{E}\hat{A}^D)^q\hat{B}\mathbf{u}_{t+q}\\ &= \hat{E}\hat{E}^D\hat{B}\mathbf{u}_t + \hat{B}\mathbf{u}_t - \hat{E}\hat{E}^D\hat{B}\mathbf{u}_t\\ &= \hat{B}\mathbf{u}_t.\end{aligned}$$

Jadi, solusi (2.10) memenuhi sistem (2.6). □

Berikut dipaparkan definisi kepositifan dari sistem deskriptor (1.1).

Definisi 2.4. [4] *Sistem (1.1) dengan* $ind(E,A) = q$ *dikatakan positif jika untuk semua* $\boldsymbol{u}_t \geq 0,\ t = 0,1,\cdots,q-1,$ *dan* $x_0 \geq 0$ *berlaku* $x_t \in \mathbb{R}^n_+$.

Berikut diberikan kriteria untuk memeriksa kepositifan dari sistem (1.1).

Teorema 2.5. [4] *Secara khusus jika* $B = 0$, *untuk sistem (1.1) adalah positif jika dan hanya jika* $\hat{E}^D\hat{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}_+$.

3. Kestabilan Sistem Deskriptor Positif Linier Diskrit

Kestabilan merupakan suatu sifat yang sangat penting bagi suatu sistem. Berikut ini akan dibicarakan tentang kestabilan sistem deskriptor linier diskrit

$$E\mathbf{x}_{(t+1)} = A\mathbf{x}_t,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{3.1}$$

Sistem (3.1) dikatakan stabil jika $\rho_f(E, A) < 1$ dimana $\rho_f(E, A)$ adalah radius spectral dari (E, A)[4].

Definisi 3.1. [4] *Suatu skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ adalah nilai eigen dari (E, A) jika*

$$\det(\lambda E - A) = 0.$$

Radius spectral hingga $\rho(E, A)$ dari (E, A) didefinisikan sebagai nilai eigen maksimum dari (E, A). Sistem (3.1) dikatakan stabil jika $\rho(E, A) < 1$.

Teorema 3.2. [4] *Jika $\hat{E}^D \hat{A} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, maka sistem deskriptor (3.1) adalah stabil asimptotik jika dan hanya jika ada $\alpha \in \mathbb{R}_{++}^n$ sedemikian sehingga*

$$(\hat{E}^D \hat{A} - I)\alpha \in \mathbb{R}_{--}^n. \tag{3.2}$$

4. Stabilisasi Sistem Deskriptor Diskrit Linier Positif

Perhatikan kembali sistem deskriptor diskrit (1.1). Sebelumnya telah dipaparkan sistem (1.1) dapat distabilkan jika terdapat kontrol *feedback* $\mathbf{u}_t = K\mathbf{x}_t$ untuk suatu $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga sistem

$$E\mathbf{x}_{t+1} = (A + BK)\mathbf{x}_t. \tag{4.1}$$

adalah stabil. Dengan asumsi bahwa sistem (4.1) adalah regular, yaitu $det(\lambda E - A - BK) \neq 0$ untuk suatu $\lambda \in \mathbb{C}$, maka (4.1) menjadi

$$\bar{E}\mathbf{x}_{t+1} = \tilde{A}\mathbf{x}_t, \tag{4.2}$$

dimana

$$\bar{E} = (\lambda E - A - BK)^{-1}E,$$
$$\tilde{A} = (\lambda E - A - BK)^{-1}(A + BK).$$

Pada Teorema 4.1 berikut diberikan syarat agar sistem (1.2) adalah stabil, positif, dan regular.

Teorema 4.1. [4] *Diberikan sistem (1.1) dimana (E, A) adalah regular, maka pernyataan berikut ekuivalen:*

(1) ada suatu matriks $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga state feedback $\boldsymbol{u}_t = K\boldsymbol{x}_t$ *membuat sistem*

$$E\boldsymbol{x}_{t+1} = (A + BK)\boldsymbol{x}_t \tag{4.3}$$

menjadi positif dan stabil.

(2) ada $\lambda \in \mathbb{C}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_n \in \mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga syarat berikut berlaku:

(a) $(\lambda E - A - BK)^{-1}$ ada

(b) untuk $i, j = 1, \cdots, n$, berlaku:

$$(\bar{E}^D \bar{A} - I)\bar{x} + \bar{E}^D \bar{B} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_i \in \mathbb{R}_-^m, \tag{4.4}$$

$$\bar{x} \in \mathbb{R}_{++}^n, \tag{4.5}$$

$$(\bar{E}^D\bar{A})_{(i,j)}x_j + \bar{b}_i\boldsymbol{y}_i \geq 0, \tag{4.6}$$

dimana:

$$\bar{E} = (\lambda E - A - BK)^{-1}E, \tag{4.7}$$

$$\bar{B} = (\lambda E - A - BK)^{-1}B, \tag{4.8}$$

$$\bar{A} = (\lambda E - A - BK)^{-1}A \tag{4.9}$$

dan $\bar{b}_i$ adalah baris ke-i dari matriks $\bar{E}^D\bar{B}$.

Bukti. Dengan menggunakan Teorema 2.3 dan Teorema 2.5, pernyataan pertama ekuivalen dengan pernyataan

$$\bar{E}^D\tilde{A} \in \mathbb{R}_+^{n\times n} \text{ dan } (I - \bar{E}^D\tilde{A})\bar{x} \in \mathbb{R}_{++}^n, \tag{4.10}$$

untuk suatu $\bar{x} \in \mathbb{R}_{++}^n$. Sehingga cukup untuk membuktikan ekuivalensi antara pernyataan kedua dan eksistensi matriks $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sedemikian sehingga (4.10) dipenuhi. Misalkan $\bar{x} = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n]^T \in \mathbb{R}_{++}^n$ dan $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \cdots, \mathbf{y}_n \in \mathbb{R}^m$. Definisikan $K = [k_i]_{i=1}^n = [\frac{\mathbf{y}_1}{x_1}\ \frac{\mathbf{y}_2}{x_2}\ \cdots\ \frac{\mathbf{y}_n}{x_n}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Karena $k_i = \frac{\mathbf{y}_i}{x_i}$ untuk $i = 1, \cdots, n$ ketaksamaan (4.6) ekuivalen dengan

$$\bar{E}^D\bar{A}_{(i,j)} + \bar{b}_i\frac{\mathbf{y}_i}{x_i} = \bar{E}^D\bar{A}(i,j) + \bar{b}_ik_i \in \mathbb{R}_+,$$

atau ekuivalen dengan

$$(\bar{E}^D\bar{A} + \bar{E}^D\bar{B}K) = \bar{E}^D\tilde{A} \in \mathbb{R}_+^{n\times n}. \tag{4.11}$$

Pernyataan (4.11) ekuivalen dengan kepositifan dari sistem (4.1). Selanjutnya, dari (3.2) diperoleh

$$\begin{aligned}(\bar{E}^D\bar{A} - I)\bar{x} + \bar{E}^D\bar{B}\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i &= [(\bar{E}^D\bar{A} - I) + \bar{E}^D\bar{B}(\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i)(\bar{x}^{-1})]\bar{x} \\ &= [(\bar{E}^D\bar{A} - I) + \bar{E}^D\bar{B}K]\bar{x} \\ &= (\bar{E}^D\tilde{A} - I)\bar{x}.\end{aligned}$$

dimana $\bar{x}^{-1} = diag(\bar{x}_i^{-1})$ dan $K\bar{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i$. Sehingga berdasarkan Teorema 3.2, diperoleh $\bar{x} > 0$ dan

$$\begin{aligned}(\bar{E}^D\bar{A} - I)\bar{x} + \bar{E}^D\bar{B}\sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i &= (\bar{E}^D(\bar{A} + \bar{B}K) - I)\bar{x} \\ &= (\bar{E}^D\tilde{A} - I)\bar{x} \in \mathbb{R}_{--}^n\end{aligned}$$

jika dan hanya jika $\bar{E}^D\tilde{A}$ adalah stabil. □

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Muhafzan, Bapak Admi Nazra, Bapak Mahdivan Syafwan, Ibu Lyra Yulianti, dan Bapak Effendi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer.* Edisi kedelapan. Jilid 1. Erlangga.

[2] Berman, A. and Plemmons, R. J. 1979. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Science.* Academic Press, New York.

[3] D. Napp, F. Tadeo, and M. Chaabane. 2014. State Feedback Positive Stabilization of Discrete Descriptor Systems, *International Journal of Innovative Computing. Information and Control* **10**(5) : 1853 – 1859

[4] E. Virnik. 2008. *Stability analysis of positive descriptor system, Linear Algebra and its Applications.* **429**: 2640 – 2659.

[5] Farina, L. dan Rinaldi, S. 2000. *Positive Linear System, theory and Applications.* John Wiley and Sons Inc., New York.

[6] Kaczorek, T. 1992. *Linier Control System*, Vol. 1. England: Research Studies Press LTD.

[7] L. Zhang. 2001. A characterization of the Drazin inverse, *Linear Algebra and Its Applications.* Vol.335, pp. 183 – 188

[8] M.Ait Rami and D. Napp. 2012. Characterization and stability of autonomous positif descriptor system, *IEEE Trans. on Automotic Control.* **57**(10): 2668 – 2673

[9] M. Ait Rami and F. Tadeo. 2007. Controller synthesis for positive linear systems with bounded controls, *IEEE. Trans.on Circuits and Systems-II.* 54 (2): 151 – 155

[10] S. Campbell Jr., C. D. Meyer and N. J. Rose. 1976. Applications of the Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations with Singular Constant Coefficients, *SIAM Journal on Applied Mathematics.* **31**(3): 411 – 425

[11] Haddad, Wassim M, Chellaboina, Qing Hui. 2010. *Nonnegative and compartmental dynamic system*, Princeton University Press.