Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **1** Hal. 90 – 96
ISSN : 2303–291X

BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF POHON *n-ARY* LENGKAP

AFIFAH DWI PUTRI, NARWEN
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : afifahdwi@gmail.com

Abstrak. Bilangan kromatik lokasi dari G adalah minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari G. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan dari G. Untuk $1 \leq i \leq k$, S_i didefinisikan sebagai himpunan dari titik yang diberi warna i. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik V merupakan vektor dengan k unsur yaitu $(d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k))$, dimana $d(v, S_i)$ adalah jarak v ke S_i, dengan $1 \leq i \leq k$. Jika untuk setiap dua titik yang berbeda u, v di $G, c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$, maka c disebut pewarnaan kromatik lokasi *(locating-chromatic coloring)* dari G. Pewarnaan lokasi dengan banyak warna yang digunakan minimum disebut pewarnaan lokasi minimum, dan kardinalitas dari himpunan yang memuat pewarnaan lokasi minimum disebut bilangan kromatik lokasi *(locating chromatic number)* dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Graf pohon *n-ary* lengkap adalah suatu graf pohon dengan satu titiknya diperlakukan sebagai akar dengan kedalaman k, serta setiap titik di dalamnya mempunyai tepat n anak. Dalam jurnal ini akan dikaji mengenai bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon *n-ary* lengkap $T(n, k)$ dengan $k = 1, 2, 3$, seperti dibahas dalam [5].

Kata Kunci: Pewarnaan lokasi, bilangan kromatik lokasi, graf pohon *n-ary* lengkap

1. PENDAHULUAN

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$, dimana V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi pada graf G. Untuk merepresentasikan titik-titik pada graf G, Chartrand dkk. [2] melakukan pengelompokan dengan cara mempartisi semua titik dalam $V(G)$ menjadi dua partisi atau lebih, berdasarkan pewarnaan titik dari graf G. Pewarnaan titik pada graf adalah $c : V(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, \cdots, k\}$ dengan syarat untuk setiap titik bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf G disebut bilangan kromatik, yang dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan G merupakan graf terhubung dan c merupakan pewarnaan terhadap titik-titik di $V(G)$ dengan warna $1, 2, \cdots, k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ merupakan partisi dari $V(G)$ ke dalam kelas - kelas warna yang saling bebas, dimana S_i merupakan himpunan dari titik yang diberi warna i, dengan $1 \leq i \leq k$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari titik V merupakan vektor dengan k unsur yaitu $(d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k))$, dimana $d(v, S_i)$ adalah jarak v ke S_i, dengan $1 \leq i \leq k$. Jika untuk setiap dua titik yang berbeda u, v di $G, c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$, maka c disebut pewarnaan kromatik lokasi *(locating-chromatic coloring)* dari G. Pewarnaan lokasi dengan banyak warna yang digunakan minimum disebut pewarnaan lokasi minimum, dan kardinalitas dari himpunan yang memuat pewarnaan lokasi minimum disebut bilangan kromatik lokasi *(locating chromatic number)* dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Salah satu graf yang dipelajari dalam jurnal ini adalah graf pohon. Graf pohon adalah suatu graf terhubung yang tidak memuat siklus. Untuk bilangan kromatik lokasi dari graf pohon, kita hanya mempunyai hasil berikut. Chartrand dkk. [2] mengkaji bilangan kromatik lokasi untuk graf lintasan dan graf bintang ganda. Selanjutnya Chartrand dkk. [3] menunjukkan bahwa untuk sebarang bilangan bulat $k \in [3, n]$, dan $k \neq n-1$, terdapat suatu pohon dengan n titik dengan bilangan kromatik lokasi k. Untuk selanjutnya, notasi $[a, b]$ menyatakan himpunan bilangan bulat yang berada dalam selang tersebut. Bagaimanapun masih terdapat banyak kelas dari graf pohon yang bilangan kromatik lokasinya belum diketahui. Pada jurnal ini akan dikaji tentang bilangan kromatik lokasi untuk salah satu jenis graf pohon, yaitu graf pohon *n-ary* lengkap, seperti yang telah dibahas dalam [5].

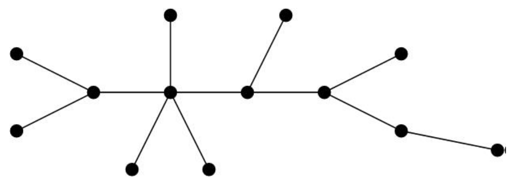
2. LANDASAN TEORI

2.1. *Graf Pohon n-ary*

Misalkan terdapat graf $G = (V, E)$, di mana V adalah suatu himpunan titik dan E adalah himpunan sisi yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik berbeda dari V. Misal $V = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ adalah himpunan dengan n titik dan $E = \{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$ adalah himpunan dengan m sisi. Sepasang titik v_i dan v_j di V dikatakan bertetangga jika $v_iv_j \in E(G)$, atau jika v_iv_j pada suatu sisi di G. Jika $v_iv_j \notin E(G)$ maka v_i dan v_j tidak bertetangga. **Derajat** *(degree)* dari v adalah banyaknya titik yang bertetangga ke v, dinotasikan dengan *deg(v)*.

Suatu **jalan** *(walk)* dari titik v_0 ke titik v_k di G adalah suatu barisan berhingga $W : v_0, e_1, v_1, e_2, \cdots, v_{(k-1)}, e_k, v_k$ dari titik-titik dan sisi-sisi di G sedemikian sehingga $v_{(i-1)}, v_i \in E(G)$, untuk $i = 1, 2, \cdots, k$. Titik v_0 dan titik v_k berturut-turut disebut titik awal dan titik akhir W. **Panjang** *(length)* jalan adalah banyaknya sisi yang digunakan dalam barisan tersebut. **Lintasan** *(path)* adalah jalan yang semua titik dan sisinya berbeda. **Jarak** *(distance)* dari titik x ke y, dinotasikan dengan $d(x, y)$ adalah panjang lintasan terpendek dari x dan y. Suatu graf G dikatakan **graf terhubung** *(connected graph)* jika untuk setiap pasang titik $u, v \in V(G)$ terdapat suatu lintasan yang menghubungkan u dan v. Jika tidak demikian, maka G adalah **graf tidak terhubung** *(disconnected graph)*.

Suatu graf terhubung yang tidak memuat siklus disebut **graf pohon** *(tree)*. Daun *(pendant)* adalah suatu titik yang memiliki derajat satu.



Gambar 1. Contoh Graf Pohon dengan 13 titik

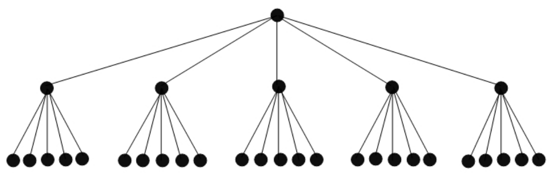
Teorema 2.1. *[1] Pada sebuah pohon, setiap dua buah titik dihubungkan oleh tepat satu lintasan.*

Bukti. Misalkan G adalah suatu pohon. Misalkan terdapat dua titik di G, namakan u dan v yang mempunyai dua lintasan berbeda dari u ke v, namakan P_1 dan P_2. Karena $P_1 \neq P_2$, terdapat sisi $e = xy$ dari P_1 yang bukan sisi dari P_2. Jelas bahwa graf $P_1 \cup P_2$ adalah graf terhubung, sehingga memuat lintasan $(u - v)P$. Namun kemudian, $(P_1 \cup P_2) + e$ adalah siklus pada graf asiklik G, kontradiksi. Maka, haruslah terdapat tepat satu lintasan pada graf G. $\square$

Definisi 2.2. *[4] Pohon Berakar (Rooted Tree) adalah pohon yang satu buah titiknya diperlakukan sebagai akar dan sisi-sisinya terletak di bawah akar.*

Misalkan T adalah pohon berakar. Jika v adalah titik pada T selain dari akarnya, maka **orangtua** ***(parent)*** dari v adalah titik tunggal u sedemikian sehingga terdapat sisi dari u ke v. Jika u adalah orangtua dari v, maka v adalah **anak** ***(children)*** dari u. Titik-titik dengan orangtua yang sama disebut **saudara kandung** ***(siblings)***. **Leluhur** ***(ancestors)*** dari suatu titik adalah titik-titik pada lintasan dari akar ke titik tersebut, di mana tidak termasuk titik itu sendiri dan termasuk akarnya. **Keturunan** ***(descendants)*** dari suatu titik v adalah semua titik yang memiliki v sebagai leluhurnya. Suatu titik dari pohon berakar yang tidak mempunyai anak disebut **daun** ***(leaf)***. Titik yang mempunyai anak disebut **titik dalam** ***(internal vertices)***. Jika a adalah suatu titik pada pohon, **upapohon** ***(subtree)*** dengan a sebagai akarnya adalah subgraf dari pohon yang memuat a dan turunannya dan semua sisi yang bertetangga dengan keturunan tersebut.

Definisi 2.3. *[4] Pohon berakar dikatakan* ***pohon n-ary*** *jika setiap titik dalamnya tidak mempunyai lebih dari n anak. Suatu pohon dikatakan* ***pohon n-ary lengkap*** *jika setiap titik dalamnya mempunyai tepat n anak, dinotasikan dengan $T(n, k)$.*



Gambar 2. Contoh Pohon *n-ary* lengkap, dengan $n = 5$ dan $k = 2$, dinotasikan dengan $T(5, 2)$

2.2. *Bilangan Kromatik Lokasi*

Bilangan kromatik lokasi graf pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. [2]. Konsep ini merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf. Pewarnaan titik pada graf adalah $c : V(G) \longrightarrow \{1, 2, 3, \cdots, k\}$ dengan syarat untuk setiap titik bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf G disebut bilangan kromatik, yang dinotasikan dengan $\chi(G)$.

Berikut ini diberikan definisi bilangan kromatik lokasi dari suatu graf yang diambil dari [2]. Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan himpunan titik-titik yang diberi warna i, dinotasikan dengan S_i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas - kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c(v)$ dari titik $v \in V(G)$ adalah k-pasang terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k))$ dengan $d(v, S_i) = min\{d(v, x)|x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Karena setiap pewarnaan lokasi juga merupakan suatu pewarnaan, maka jelas bahwa $\chi(G) \leq \chi_L(G)$.

3. BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF POHON n-ARY LENGKAP

3.1. *Graf Pohon n-Ary Lengkap*

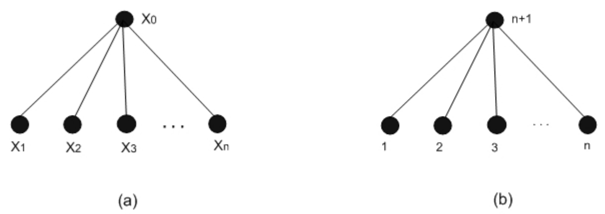
Graf pohon *n-ary* lengkap adalah suatu graf pohon dengan satu titiknya diperlakukan sebagai akar dengan kedalaman k, serta setiap titik di dalamnya mempunyai tepat n anak. Untuk $n, k \geq 3$, graf $T(n, k)$ adalah suatu graf pohon dengan *n-ary* lengkap dengan kedalaman k, dimana setiap titik mempunyai n anak kecuali untuk daunnya. Kedalaman dari $T(n, k)$ adalah panjang dari suatu lintasan dari titik akar ke daunnya.

Pada Teorema 3.1 dan Teorema 3.2 berikut akan dikaji masalah yang dibahas pada [5], yaitu tentang bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon *n-ary* lengkap dengan $k = 1, 2, 3$.

Teorema 3.1. [5] *Jika* $n \geq 2$ *maka* $\chi_L(T(n, 1)) = \chi_L(T(n, 2)) = n + 1$.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(T(n, 1)) = n + 1$ untuk $n \geq 2$. Pandang Gambar 3(a). Graf $T(n, 1)$ mempunyai satu titik akar dan n daun, dengan $V(T(n, 1)) = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ dan $E(T(n, 1)) = \{x_0x_1, x_0x_2, \cdots, x_0x_n\}$. Karena graf $T(n, 1)$ mempunyai n daun, maka warna untuk daun adalah $1, 2, \cdots, n$ dan warna untuk titik akar adalah $n + 1$ agar setiap titik yang bertetangga memiliki warna yang berbeda. Meskipun daun pada Graf $T(n, 1)$ tidak ada yang bertetangga, namun warna pada setiap daun haruslah berbeda agar setiap titik pada Graf $T(n, 1)$ memiliki kode warna yang berbeda, sehingga bilangan kromatik lokasi dari $T(n, 1), \chi_L(T(n, 1)) = n + 1$. Pewarnaan lokasi untuk graf $T(n, 1)$ diberikan pada Gambar 3(b).

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(T(n, 2)) = n + 1$. Perhatikan Gambar 4(a). Misalkan x_0 adalah titik akar dari $T(n, 2)$, dengan $\{x_0\} \cup \{x_i|1 \leq i \leq n\} \cup \{x_{ij}|1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$. Misalkan $L_1 = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, $L_2 = \{x_{(ij)}|i, j \in [1, n]\}$ sehingga dapat ditulis $V(T(n, 2)) = \{x_0\} \cup L_1 \cup L_2$.



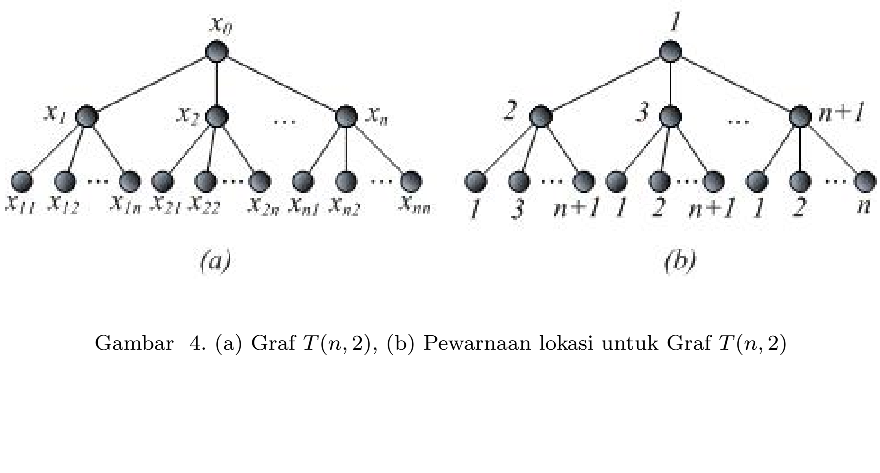
Gambar 3. (a) Graf $T(n,1)$, (b) Pewarnaan lokasi untuk Graf $T(n,1)$

Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_{(n+1)}\}$ adalah partisi dari $V(T(n,2))$ yang diinduksi oleh c, dimana C_i adalah himpunan semua titik yang mendapatkan warna i. Untuk menunjukkan bahwa $\chi(T(n,2)) \leq n+1$, definisikan suatu pewarnaan $c : V(T(n,2)) \rightarrow \{1, 2, \cdots, n+1\}$ sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
c(x_0) &= 1, \\
c(x_i) &= i+1, \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\
c(L_2) &= [1, n+1] \setminus \{i+1\}, \text{ dimana } L_2 = \{x_{(ij)} | j \in [1, n]\}.
\end{aligned}
$$

Akan ditunjukkan bahwa kode warna dari semua titik berbeda. Misalkan u dan v adalah dua titik berbeda dengan $c(u) = c(v)$. Pandang beberapa kasus berikut.
Kasus 1. $u = x_0, v \in L_2$.
Jika $v = x_{ir}$ untuk suatu $i, 1 \leq i \leq n$ dan $r, 1 \leq r \leq n$ maka $d(u, C) = 1$ dan $d(v, C) = 2$ untuk $C = C_{i-1}$ atau $C = C_{i+1}$. Maka diperoleh $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
Kasus 2. $u \in L_1, v \in L_2$.
Jika $u = x_i$ dan $v = x_{jr}$, untuk suatu i, j, r dan $i \neq j$ maka $d(u, C) = 1$ dan $d(v, C) = 2$ untuk $C = C_{i-1}$ atau $C = C_{i+1}$. Maka diperoleh $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.
Kasus 3. $u, v \in L_2$.
Jika $u = x_{ir}$ dan $v = x_{js}$, untuk suatu i, j, r, s dan $i \neq j$ maka $d(u, C_{i+1}) = 1$ dan $d(v, C_{i+1}) = 2$. Maka diperoleh $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$. □

Pewarnaan lokasi untuk graf $T(n,2)$ diberikan pada Gambar 4(b).



Gambar 4. (a) Graf $T(n,2)$, (b) Pewarnaan lokasi untuk Graf $T(n,2)$

Untuk $n \geq 3$ dan $k = 3$, diperoleh bilangan kromatik lokasi dari graf $T(n, 3)$ seperti dalam Teorema 3.2 berikut.

Teorema 3.2. [5] *Jika* $n \geq 3$ *maka* $\chi_L(T(n, 3)) = n + 2$.

Bukti. Misalkan x_0 titik akar dari $T(n, 3)$. Untuk $i = 1, 2, 3$, definisikan $L_i = \{v \in T(n, 3)|d(v, x_0) = i\}$. Sehingga $L_1 = \{x_i \in T(n, 3)|d(x_i, x_0) = 1, 1 \leq i \leq n\}$, $L_2 = \{x_{ij} \in T(n, 3)|d(x_{ij}, x_0) = 2, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$, dan $L_3 = \{x_{ijk} \in T(n, 3)|d(x_{ijk}, x_0) = 3, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq n\}$. Misalkan $V(T(n, 3)) = \{x_0\} \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$.

Misalkan c adalah pewarnaaan lokasi-$(n+1)$ dari $T(n, 2)$, seperti pada Teorema 3.1. Untuk $j = 1, 2, \cdots, n$, misalkan $T^j(n, 2)$ adalah salinan ke-j dari $T(n, 2)$ di $T(n, 3)$ dan x_j adalah salinan ke-j dari titik x dari $T(n, 2)$ di $T(n, 3)$. Untuk menunjukkan bahwa $\chi(T(n, 3)) \leq n + 2$, definisikan pewarnaan baru $c^* : V(T(n, 3)) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n + 2\}$ sedemikian sehingga :

$$c^*(x_j) = (c(x) + (i - 1))mod(n + 2), \text{ untuk } 1 \leq i \leq n,$$
$$c^*(x_0) = n + 2.$$

Misalkan $\Pi^* = \{C_1, C_2, \cdots, C_{n+2}\}$ adalah partisi-$n + 2$ dari $V(T(n, 3))$ yang diinduksi oleh c^*, dimana C_i adalah himpunan semua titik dari warna i. Dengan menggunakan definisi pewarnaan c^* dari $T(n, 3)$, didapatkan bahwa $c^*(x_0) = n+2$, himpunan warna - warna dari semua titik di $T^1(n, 2)$ adalah $c^*(T^1(n, 2)) = [1, n+1]$ dan himpunan warna - warna dari semua titik di $T^i(n, 2)$ adalah $c^*(T^i(n, 2)) = [1, n + 2] \setminus \{i - 1\}$, untuk sebarang $i \in [2, n]$. Maka $c^*(L_1) = [1, n]$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa kode warna dari semua titik di $T(n, 3)$ berbeda. Misalkan u dan v adalah dua titik berbeda dengan $c^*(u) = c^*(v)$. Jika satu dari $\{u, v\}$ adalah x_0 maka jelas bahwa $c_{\Pi*}(u) \neq c_{\Pi*}(v)$. Jika tidak satupun dari u dan v adalah titik akar maka pandang kasus-kasus berikut.

Kasus 1. $u \in L_a, v \in L_b$, dan $a \neq b$.

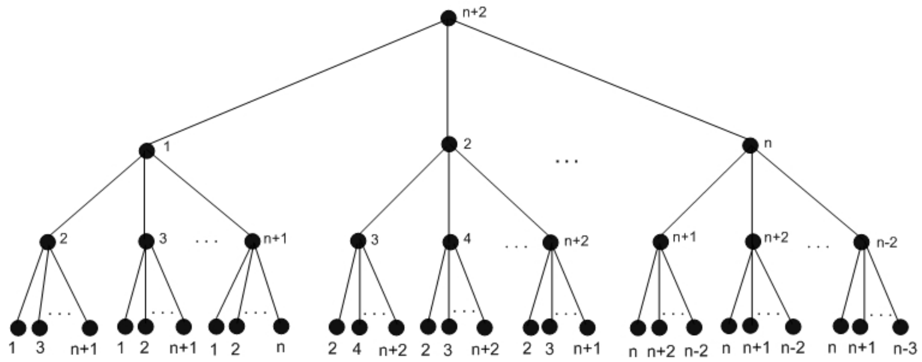
Misalkan $a < b$. Jika $u, v \in V(T^i(n, 2))$ untuk suatu $i \in [1, n]$ maka $d(u, C_{i-1 mod(n+2)}) < d(v, C_{i-1 mod(n+2)})$. Jadi, $c_{\Pi*}(u) \neq c_{\Pi*}(v)$. Jika $u \in V(T^i(n, 2)), v \in V(T^j(n, 2))$ untuk suatu $i < j$ maka $d(u, C_{j-1 mod(n+2)}) < d(v, C_{j-1 mod(n+2)})$. Jadi, $c_{\Pi*}(u) \neq c_{\Pi*}(v)$.

Kasus 2. $u, v \in L_a$.

Karena semua warna dari titik-titik di L_1 berbeda maka $a = 2$ atau 3. Jika $u, v \in T^i(n, 2)$ untuk suatu i maka $a = 3$ dan $c_{\Pi*}(u) \neq c_{\Pi*}(v)$, karena c adalah pewarnaan lokasi di $T(n, 2)$. Misalkan $u \in T^i(n, 2), v \in T^j(n, 2)$, dan $i \neq j$. Maka, salah satu dari $\{i, j\}$ tidak sama dengan 1. Sehingga, dapat diasumsikan bahwa $j \neq 1$. Jadi, $d(v, C_{j-1}) > d(u, C_{j-1})$. Ini berarti $c_{\Pi*}(u) \neq c_{\Pi*}(v)$.

Oleh karena itu, untuk semua kasus, semua kode warna dari titik-titik berbeda, sehingga $\chi_L(T(n, 3)) \leq n+2$. Karena terdapat lebih dari $n+1$ titik yang mempunyai n daun maka $\chi_L(T(n, 3)) \geq n + 2$. Sehingga diperoleh $\chi_L(T(n, 3)) = n + 2$. □

Pewarnaan lokasi untuk Graf $T(n, 3)$ diberikan dalam Gambar 5.



Gambar 5. Pewarnaan Lokasi untuk Graf $T(n, 3)$

4. KESIMPULAN

Graf pohon *n-ary* lengkap $T(n, k)$ adalah suatu graf pohon dengan satu titiknya diperlakukan sebagai akar dengan kedalaman k, serta setiap titik di dalamnya mempunyai tepat n anak. Bilangan kromatik lokasi *(locating chromatic number)* adalah banyaknya warna minimum yang digunakan untuk pewarnaan lokasi dari graf G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Pada jurnal ini telah dikaji kembali makalah [5] mengenai bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon *n-ary* lengkap $T(n, k)$ dengan $k = 1, 2, 3$ dimana diperoleh bahwa bilangan kromatik lokasi untuk graf pohon *n-ary* lengkap $T(n, k)$ dengan $k = 1, 2, 3$ adalah sebagai berikut.

$$\chi_L(T(n, 1)) = \chi_L(T(n, 2)) = n + 1, \text{ untuk } k = 1 \text{ atau } k = 2, \text{ dan } n \geq 2,$$
$$\chi_L(T(n, 3)) = n + 2, \text{ untuk } k = 3, \text{ dan } n \geq 3.$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada ibu Lyra Yulianti, bapak Syafrizal Sy, bapak Zulakmal dan ibu Susila Bahri yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy J.A. dan U.S.R Murty. 1976. *Graph Theory with Applications.* London
[2] Chartrand,G, D. Erwin, M.A. Henning, P.J. Slater, P. Zhang. 2002. The Locating Chromatics Number of A Graph, *Bulletin Of The Institute Combinatorics and Its Applications* **36** : 89 – 101
[3] Chartrand,G, D. Erwin, M.A. Henning, P.J. Slater, P. Zhang. 2003. Graph Of Order n with Locating Chromatic Number n-1, *Discrete Math.* **269** : 65 – 79
[4] Rosen, K.H. 2012. *Discrete Mathematics and its Applications*, 7^{th} Ed. New York.
[5] Welyyanti, D., E.T. Baskoro, R. Simanjutak, S. Uttunggadewa. 2013. On Locating Chromatic Number of Complete n-ary Tree. *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **3** : 309 – 315