Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **1** Hal. 97 – 104
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

PENYELESAIAN NUMERIK DARI PERSAMAAN DIFERENSIAL NONLINIER *ADVANCE-DELAY*

YOSI ASMARA

Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : asmara.yosi@gmail.com

Abstrak. Pada makalah ini akan dijelaskan tentang konstruksi skema numerik dalam menyelesaikan persamaan diferensial nonlinier *advance-delay*. Skema numerik menggunakan beda hingga untuk mengaproksimasi bagian turunan dari persamaan, dan interpolasi kubik untuk mengaproksimasi bagian *advance-delay*. Telah dibuktikan pula bahwa skema numerik tersebut konsisten terhadap persamaan *advance-delay*.Skema numerik yang dihasilkan diuji dengan solusi eksak yang telah diketahui. Berdasarkan hasil simulasi numerik yang dilakukan, dapat disimpulkan bahwa solusi numerik dari persamaan diferensial nonlinier *advance-delay* mempunyai kesesuaian yang sangat baik dengan solusi eksaknya.

Kata Kunci: Differential equations, initial value problem, heaviside

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial banyak diterapkan dalam berbagai disiplin ilmu seperti fisika, kimia, biologi, metalurgi dan disiplin ilmu lainnya. Salah satu kelas dari persamaan diferensial adalah persamaan diferensial *advance-delay*, yaitu persamaan yang memuat nilai-nilai variabel tunda, misalkan $(t-\tau)$ dan variabel maju, misalkan $(t+\tau)$, dengan $\tau > 0$.

Pada makalah ini akan dikaji penyelesaian numerik dari persamaan diferensial *advance-delay* yang berbentuk

$$v'(t) = v(t-\tau) - 2v(t) + v(t+\tau) + f(v(t)), \tag{1.1}$$

dimana $t \in \mathbb{R}$, $\lim_{t\to-\infty} v(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 1$, dan $f(v(t))$ menyatakan suku nonlinier.

Persamaan (1.1) juga dikenal sebagai persamaan diferensial bertipe campuran (*mixed type*). Persamaan *advance-delay* (1.1) diperkenalkan pertama kali oleh Chi dkk [2] pada tahun 1986 dengan membahas aplikasi pada masalah penghantaran rangsangan pada sistem jaringan syaraf. Selanjutnya pada tahun 1989, Rustichini [6] juga mengkaji persamaan *advance-delay* (1.1) dengan aplikasi pada masalah kontrol optimal untuk kasus autonomous linier. Rustichini kemudian memperluas kajiannya untuk kasus nonlinier dengan aplikasi pada masalah dinamika ekonomi [7].

Persamaan diferensial (*advance-delay*) juga dapat muncul dari masalah gelombang berjalan (*traveling wave*) pada media spasial diskrit (*lattice*). Sebagai ilustrasi,

pandang persamaan diferensial *lattice* linier berikut:

$$\dot{u}_n = u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n, \tag{1.2}$$

dimana $u_n \equiv u_n(t)$ dan $\dot{u}_n \equiv u_n'(t)$. Solusi gelombang berjalan dari persamaan (1.2) dapat ditentukan dengan melakukan transformasi

$$u_n(t) = v(z), \tag{1.3}$$

dimana $z = n - kt$ dengan $k > 0$ menyatakan parameter kecepatan. Selanjutnya, substitusi persamaan (1.3) ke persamaan (1.2) menghasilkan

$$-kv'(z) = v(z+1) + v(z-1) - 2v(z), \tag{1.4}$$

yang merupakan persamaan diferensial *advance-delay*.

Dalam masalah gelombang berjalan pada media spasial diskrit nonlinier, persamaan *advance-delay* yang muncul pada masalah ini sulit untuk dianalisis [4]. Oleh karena itu pendekatan numerik sangat penting untuk dilakukan.

2. Aproksimasi Solusi di Luar Interval

Pandang kembali persamaan (1.1) dengan $f \in C^3[0,1]$ dan memenuhi $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f'(0) < 0$, dan $f(1) < 0$. Akan dicari solusi $v(t)$ yang monoton naik sedemikian sehingga $0 < v(t) < 1$ untuk setiap t. Dalam konteks numerik, persamaan (1.1) diselesaikan dalam interval tutup $t \in [-L, L]$ untuk suatu $L > 0$ yang cukup besar. Karena adanya suku *advance* dan suku *delay* pada persamaan (1.1), maka perlu ditinjau aproksimasi solusi di luar interval $[-L, L]$, yaitu untuk $t < -L$ dan $t > L$.

Pandang terlebih dahulu kasus $t \leq -L$ dengan $v(t) \to 0$, dan $f(v(t)) \to 0$ ketika $t \to -\infty$. Dengan menggunakan ekspansi Taylor [1] untuk f di sekitar $v(t) = 0$, diperoleh

$$f(v(t)) = a_1 v(t) + a_2 v(t)^2 + a_3 v(t)^3 + \mathcal{O}(v(t)^4). \tag{2.1}$$

Dengan demikian persamaan (1.1) dapat ditulis

$$\begin{aligned} v'(t) = a_1 v(t) + a_2 v(t)^2 + a_3 v(t)^3 + v(t-\tau) - 2v(t) \\ + v(t+\tau) + \mathcal{O}(v(t)^4). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Perhatikan bahwa

$$v(-L) = \varepsilon u_1(-L) + \varepsilon^2 u_2(-L) + \varepsilon^3 u_3(-L) + \mathcal{O}(\varepsilon)^4. \tag{2.3}$$

Oleh karena $\varepsilon = v(-L)$, maka digunakan syarat batas berikut:

$$u_1(-L) = 1, \quad u_2(-L) = 0, \quad u_3(-L) = 0. \tag{2.4}$$

Perhatikan bahwa persamaan (2.4) adalah persamaan linier homogen. Dengan demikian solusi persamaan (2.4) dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $u_1(t) = Ke^{\lambda t}$, untuk suatu konstanta K, ke persamaan (2.4). Substitusi ini memberikan hasil berikut:

$$\lambda - (a_1 - 2) - (e^{\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}) = 0 \Longleftrightarrow \lambda + 2 - a_1 - 2\cosh(\lambda\tau) = 0. \tag{2.5}$$

Karena $a_1 = f'(0) < 0$, maka persamaan (2.5) memiliki dua akar riil yang bernilai positif dan negatif. Misalkan λ_+ adalah akar positif dari persamaan (2.5), maka solusi dari persamaan (2.4) yang memenuhi $u_1(-L) = 1$ dan $u_1(t) \to 0$ ketika $t \to -\infty$ adalah

$$u_1(t) = e^{\lambda_+(t+L)}. \tag{2.6}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa persamaan (2.6) adalah persamaan linier nonhomogen. Misalkan solusi partikular dari persamaan (2.6) adalah $u_2^p(t) = b_1 e^{2\lambda_+(t+L)}$, sehingga setelah disubstitusikan ke persamaan (2.6) diperoleh

$$b_1 = \frac{a_2}{2\lambda_+ - a_1 + 2 - 2\cosh(2\lambda_+\tau)}.$$

Dengan demikian solusi dari persamaan (2.6) yang memenuhi $u_2(-L) = 0$ adalah

$$u_2(t) = e^{\lambda+(t+L)} + b_1 e^{2\lambda_+(t+L)}. \tag{2.7}$$

Kemudian perhatikan pula bahwa persamaan (2.7) adalah persamaan linier nonhomogen. Misalkan solusi partikular dari persamaan (2.7) adalah $u_3^p(t) = b_2 e^{2\lambda_+(t+L)} + b_3 e^{3\lambda_+(t+L)}$, sehingga setelah disubstitusikan ke persamaan (2.7) diperoleh

$$b_2 = \frac{-2a_2 b_1}{2\lambda_+ - a_1 + 2 - 2\cosh(2\lambda_+\tau)} = -2b_1^2,$$
$$b_3 = \frac{2a_2 b_1 + a_3}{3\lambda_+ - a_1 + 2 - 2\cosh(3\lambda_+\tau)}.$$

Dengan demikian solusi dari persamaan (2.7) adalah

$$u_3(t) = e^{\lambda_+(t+L)} + b_2 e^{2\lambda_+(t+L)} + b_3 e^{3\lambda_+(t+L)}. \tag{2.8}$$

Jadi untuk $t < -L$ didapatkan

$$\begin{aligned} v(t) &= \varepsilon e^{\lambda_+(t+L)} + \varepsilon^2(e^{\lambda_+(t+L)} + b_1(e^{2\lambda_+(t+L)})) \\ &+\varepsilon^3(e^{\lambda_+(t+L)} + b_2 e^{2\lambda_+(t+L)} + b_3 e^{3\lambda_+(t+L)}) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Selanjutnya pandang kasus $t > L$, dengan $v(t) \to 1$ dan $f(v(t)) \to 0$ ketika $t \to +\infty$. Dengan menggunakan ekspansi Taylor di sekitar $v(t) = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} f(v(t)) &= f(1) + f'(1)(v(t)-1) + \tfrac{f''(1)}{2!}(v(t)-1)^2 \\ &+\tfrac{f'''(1)}{3!}(v(t)-1)^3 + \mathcal{O}((v(t)-1)^4). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Untuk penyederhanaan penulisan, misalkan

$$A_1 = -f'(1), \quad A_2 = -\frac{f''(1)}{2!}, \quad A_3 = -\frac{f'''(1)}{3!}. \tag{2.11}$$

Dengan menggunakan (2.11) dan dari kenyataan $f(1) = 0$ maka persamaan (2.10) dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned} v'(t) &= A_1(1-v(t)) + A_2(1-v(t))^2 + A_3(1-v(t))^3 + (v(t-\tau)) \\ &-2v(t) + v(t+\tau) + \mathcal{O}\big((1-v(t))^4\big). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Karena $v(L) \to 1$ ketika $L \to \infty$, maka tulis $v(L) = 1-\varepsilon_+$, $0 < \varepsilon_+ \ll 1$. Selanjutnya pandang ekspansi

$$v(t) = 1 - \varepsilon_+ w_1(t) - \varepsilon_+^2 w_2(t) - \varepsilon_+^3 w_3(t) + \mathcal{O}(\varepsilon_+^4). \tag{2.13}$$

Perhatikan bahwa

$$v(L) = 1 - \varepsilon_+ w_1(L) - \varepsilon_+^2 w_2(L) - \varepsilon_+^3 w_3(L) + \mathcal{O}(\varepsilon_+^4). \tag{2.14}$$

Oleh karena $v(L) = 1 - \varepsilon_+$, maka digunakan syarat batas berikut:

$$w_1(L) = 1, \quad w_2(L) = 0, \quad w_3(L) = 0. \tag{2.15}$$

Substitusikan persamaan (2.13) ke persamaan (2.12), maka didapatkan

$$\begin{aligned}
&1 + \big(-A_1 w_1(t) - w_1'(t) - 2w_1(t) + w_1(t-\tau) + w_1(t+\tau)\big)\varepsilon_+ \\
&+\big(-A_2 w_1(t)^2 - A_1 w_2(t) - w_2'(t) - 2w_2(t) + w_2(t-\tau) + w_2(t+\tau)\big)\varepsilon_+^2 \\
&+\big(-A_3 w_1(t)^3 - 2A_2 w_1(t) w_2(t) - A_1 w_3(t) - w_3'(t) - 2w_3(t) + w_3(t-\tau) \\
&+w_3(t+\tau)\big)\varepsilon_+^3 + \mathcal{O}(\varepsilon_+^4).
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh persamaan-persamaan berikut:

$$\mathcal{O}(\varepsilon_+) : w_1'(t) - K_\tau w_1(t) = 0, \tag{2.16}$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon_+^2) : w_2'(t) - K_\tau w_2(t) = -A_2 w_1(t)^2, \tag{2.17}$$

$$\mathcal{O}(\varepsilon_+^3) : w_3'(t) - K_\tau w_3(t) = -A_2 w_1(t)^3 - 2A_2 w_1(t) w_2(t), \tag{2.18}$$

dimana operator K_τ didefinisikan sebagai

$$K_\tau w(t) = w(t-\tau) - (A_1 + 2)w(t) + w(t+\tau). \tag{2.19}$$

Perhatikan bahwa persamaan (2.16) adalah persamaan linier homogen. Solusi persamaan (2.16) dapat diperoleh dengan mensubstitusikan $u_1(t) = De^{\lambda t}$, untuk suatu konstanta D, ke persamaan (2.16). Substitusi ini memberikan hasil

$$\lambda - (A_1 - 2) - (e^{\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 - A_1 - 2\cosh(\lambda\tau) = 0. \tag{2.20}$$

Persamaan (2.20) memiliki dua akar riil yang bernilai positif dan negatif, karena $A_1 = -f'(0) > 0$. Misalkan λ_- adalah akar negatif dari persamaan (2.20), maka solusi dari persamaan (2.16) yang memenuhi $w_1(L) = 1$ dan $w_1(t) \to 1$ ketika $t \to \infty$ adalah

$$w_1(t) = e^{\lambda_-(t-L)}. \tag{2.21}$$

Selanjutnya perhatikan bahwa persamaan (2.17) adalah persamaan linier nonhomogen. Misalkan solusi partikular dari persamaan (2.17) adalah $w_2^p(t) = B_1 e^{2\lambda_-(t-L)}$, sehingga setelah disubstitusikan ke persamaan (2.17) diperoleh

$$B_1 = \frac{-A_2}{2\lambda_- + (A_1 + 2) - 2\cosh(2\lambda_-)}.$$

Dengan demikian solusi dari persamaan (2.17) adalah

$$w_2(t) = e^{\lambda_-(t-L)} + B_1(e^{2\lambda_-(t-L)}). \tag{2.22}$$

Kemudian perhatikan pula bahwa persamaan (2.18) adalah persamaan linier nonhomogen. Misalkan solusi partikular dari persamaan (2.18) adalah $w_3^p(t) =$

$B_2e^{2\lambda_-(t-L)} + B_3e^{3\lambda_-(t-L)}$, sehingga setelah disubstitusikan ke persamaan (2.18), diperoleh

$$B_2 = \frac{2A_2B_1}{2\lambda_- + A_1 + 2 - 2\cosh(2\lambda_-\tau)} = -2B_1^2,$$
$$B_3 = \frac{-2A_2B_1 - A_3}{3\lambda_- + A_1 + 2 - 2\cosh(3\lambda_-\tau)}.$$

Jadi solusi dari persamaan (2.18) adalah

$$w_3(t) = e^{\lambda_-(t-L)} + B_2e^{2\lambda_-(t-L)} + B_3e^{3\lambda_-(t-L)}. \tag{2.23}$$

Oleh karena itu, untuk $t > L$, dengan $\varepsilon_+ = 1 - v(L)$ diperoleh

$$\begin{aligned} v(t) &= 1 - \varepsilon_+e^{\lambda_-(t-L)} - \varepsilon_+^2(B_1e^{2\lambda_-(t-L)} + e^{\lambda_-(t-L)}) \\ &-\varepsilon_+^3(e^{\lambda_-(t-L)} + B_2e^{2\lambda_-(t-L)} + B_3e^{3\lambda_-(t-L)}) + \mathcal{O}(\varepsilon_+^4). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Substitusikan persamaan (2.3) ke persamaan (2.2), maka diperoleh

$$\begin{aligned} &\big(-a_1u_1(t) + u_1'(t) + 2u_1(t) - u_1(t-\tau) - u_1(t+\tau)\big)\varepsilon + \big(-a_2u_1(t)^2 \\ &-a_1u_2(t) + u_2'(t) + 2u_2(t) - u_2(t-\tau) - u_2(t+\tau)\big)\varepsilon^2 + \big(-a_3u_1(t)^3 \\ &-2a_2u_1(t)u_2(t) - a_1u_3(t) + u_3'(t) + 2u_3(t) - u_3(t-\tau) - u_3(t+\tau)\big)\varepsilon^3 \\ &+\mathcal{O}(\varepsilon)^4 = 0, \end{aligned}$$

sehingga didapatkan persamaan-persamaan berikut:

$$\mathcal{O}(\varepsilon) : u_1'(t) - L_\tau u_1(t) = 0, \tag{2.25}$$
$$\mathcal{O}(\varepsilon^2) : u_2'(t) - L_\tau u_2(t) = a_2u_1(t)^2, \tag{2.26}$$
$$\mathcal{O}(\varepsilon^3) : u_3'(t) - L_\tau u_3(t) = a_3u_1(t)^3 + 2a_2u_1(t)u_2(t), \tag{2.27}$$

dimana operator L_τ didefinisikan sebagai

$$L_\tau u(t) = u(t-\tau) + (a_1 - 2)u(t) + u(t+\tau). \tag{2.28}$$

3. Beda Hingga dan Skema Interpolasi

Pandang persamaan diferensial *advance-delay* nonlinier berikut:

$$\frac{dv(t)}{dt} = f(v(t)) + v(t-\tau) - 2v(t) + v(t+\tau), \quad -L \le t \le L. \tag{3.1}$$

Dalam hal ini f adalah fungsi nonlinier dengan $f(0) = f(1) = 0$. Persamaan (3.1) adalah persamaan autonomus, oleh karena itu ditetapkan

$$v(0) = 0.5. \tag{3.2}$$

Untuk menerapkan skema beda hingga pada persamaan (3.1), interval $[-L, L]$ dipartisi menjadi N subinterval. Setiap subinterval mempunyai panjang yang sama, misalkan h. Jadi titik-titik partisi dapat ditulis $t_j = -L + jh$, $j = 0, 1, 2, \cdots, N$, dimana $N = 2L/h$. Selanjutnya tulis nilai $v(t_j)$ dengan v_j. Suku turunan pertama dari persamaan (3.1) diaproksimasi dengan menggunakan beda pusat orde empat [3], yaitu diperoleh

$$v'(t) = \frac{1}{12h}\big(v(t-2h) - 8v(t-h) + 8v(t+h) - v(t+2h)\big) + \frac{h^4}{30}f^{(5)}(\zeta), \tag{3.3}$$

untuk suatu $\zeta \in (t-2h, t+2h)$. Dengan demikian untuk $t = t_j$ didapatkan

$$v'(t_j) = \frac{1}{12h}(v_{j-2} - 8v_{j-1} + 8v_{j+1} - v_{j+2}). \tag{3.4}$$

Perhatikan bahwa untuk $j = 0$ dan $j = 1$, suku v_{-2} dan v_{-1} muncul pada persamaan (3.4). Pada kasus ini digunakan persamaan (2.9) untuk mengaproksimasi v_{-2} dan v_{-1}, yaitu pada saat $t = -L-2h$ dan $t = -L-h$. Dengan cara yang sama, untuk $j = N-1$ dan $j = N$, suku v_{N+1} dan v_{N+2} muncul pada persamaan (3.4). Persamaan (2.24) kemudian digunakan untuk mengaproksimasi v_{N+1} dan v_{N+2}, yaitu pada saat $t = L+h$ dan $t = L+2h$.

Selanjutnya suku *advance* dan *delay* pada persamaan (3.1) diaproksimasi dengan menggunakan interpolasi kubik. Misalkan $M = [\tau/h]$, dimana "$[x]$" menyatakan bagian dari bilangan bulat dari x dan misalkan $r = \tau - Mh$. Jelas bahwa $r \geq 0$ dan $t - Mh - h < t - \tau < t - Mh$. Dengan menggunakan formula kubik diperoleh

$$\begin{aligned} v(t-\tau) = C_4 v(t - Mh - 2h) + C_3 v(t - Mh - h) + C_2 v(t - Mh) \\ + C_1 v(t - Mh + h) + \frac{9h^4}{342} f^{(4)}(\zeta), \end{aligned}$$

untuk suatu $\zeta \in (t - Mh - 2h, t - Mh + h)$, dimana C_i adalah konstanta yang diberikan oleh

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{-(2h-r)(h-r)r}{6h^3}, \\ C_2 &= \frac{(2h-r)(h-r)(h+r)}{2h^3}, \\ C_3 &= \frac{(2h-r)(h+r)r}{2h^3}, \\ C_4 &= \frac{-(h+r)(h-r)r}{6h^3}. \end{aligned}$$

Dengan demikian suku *delay* diaproksimasi oleh

$$v(t_j - \tau) \approx C_4 v_{j-M-2} + C_3 v_{j-M-1} + C_2 v_{j-M} + C_1 v_{j-M+1}. \tag{3.5}$$

Dengan cara yang sama, suku *advance* diaproksimasi oleh

$$v(t_j + \tau) \approx C_4 v_{j+M+2} + C_3 v_{j+M+1} + C_2 v_{j+M} + C_1 v_{j+M-1}. \tag{3.6}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.2) sampai persamaan (3.6), maka persamaan (3.1) dapat ditulis dalam bentuk diskrit sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{1}{12h}(v_{j-2} - 8v_{j-1} + 8v_{j+1} - v_{j+2}) - f(v_j) + 2v_j - C_1 v_{j+M-1} \\ - C_2 v_{j+M} - C_3 v_{j+M+1} - C_4 v_{j+M+2} - C_4 v_{j-M-2} - C_3 v_{j-M-1} \\ - C_2 v_{j-M} - C_1 v_{j-M+1} = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

untuk $j = 0, 1, \cdots, N$.

Selanjutnya versi diskrit dari syarat (3.2) diberikan oleh

$$v_{N'} - 0.5 = 0, \quad \text{dimana } N' = [N/2]. \tag{3.8}$$

Untuk mendapatkan solusi numerik yang memenuhi syarat (3.2), maka persamaan ke-$[N/2]$ pada sistem (3.7) diganti dengan persamaan (3.8).

4. Kekonsistenan Persamaan Beda

Pada bagian ini akan diperiksa kekonsistenan dari persamaan beda (3.7) terhadap persamaan diferensial *advance-delay* (3.1) dengan menggunakan Definisi kekonsistenan [5]. Dengan menggunakan ekspansi deret Taylor di sekitar v_j, maka suku-suku pada persamaan beda (3.7) dapat ditulis:

$$\begin{aligned}
v_{j\pm 2} &= v(t_j) \pm 2hv'(t_j) + 2h^2v''(t_j) \pm \frac{4}{3}h^3v'''(t_j) + \cdots \\
v_{j\pm 1} &= v(t_j) \pm hv'(t_j) + \frac{1}{2}h^2v''(t_j) \pm \frac{1}{6}h^3v'''(t_j) + \cdots \\
v_{j\pm(M+1)} &= v(t_j) \pm (M+1)hv'(t_j) + \frac{1}{2}\big((M+1)h\big)^2v''(t_j) \pm \frac{1}{6}\big((M+1)h\big)^3v'''(t_j) + \cdots \\
v_{j\pm(M+2)} &= v(t_j) \pm (M+2)hv'(t_j) + 2\big((M+2)h\big)^2v''(t_j) \pm \frac{4}{3}\big((M+2)h\big)^3v'''(t_j) + \cdots \\
v_{j\pm M} &= v(t_j) \pm Mhv'(t_j) + \frac{1}{2}(Mh)^2v''(t_j) \pm \frac{1}{6}(Mh)^3v'''(t_j) + \cdots \\
v_{j\pm(M-1)} &= v(t_j) \pm (M-1)hv'(t_j) + \frac{1}{2}\big((M-1)h\big)^2v''(t_j) \pm \frac{1}{6}\big((M-1)h\big)^3v'''(t_j) + \cdots
\end{aligned}$$

Substitusikan persamaan di atas ke persamaan beda (3.7) dan gunakan $r = \tau - Mh$, diperoleh persamaan diferensial termodifikasi

$$\big(v'(t_j) - f(v(t_j))) + 2v(t_j) - v(t_j - \tau) - v(t_j + \tau)\big) + \mathcal{O}(h^2) = 0. \tag{4.1}$$

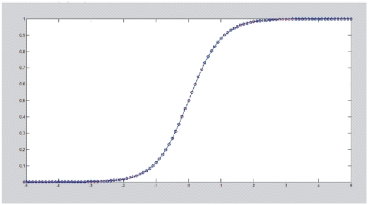
5. Simulasi Numerik

Simulasi numerik pada subbab ini bertujuan untuk membandingkan solusi numerik dan solusi eksak dari persamaan (3.1). Sebagai contoh ilustrasi, digunakan suku nonlinier f berikut:

$$f(v) = \frac{1 + 2\vartheta(2v-1) - (1+\vartheta)(2v-1)^2 - \vartheta(3-2v)(2v-1)^3}{2(1 - \vartheta(2v-1)^2)}, \tag{5.1}$$

dengan $\tau = \tanh^{-1}(\sqrt{\vartheta})$. Solusi eksak dari persamaan (3.1) dengan suku nonlinier (5.1) diberikan oleh [4]

$$v(t) = \frac{1 + \tanh(t)}{2}. \tag{5.2}$$



Gambar 1. Perbandingan solusi numerik (garis-bulat) dan solusi eksak (garis-silang)

Dengan menggunakan parameter $\tau = 1$, $h = 0.1$ dan $L = 5$, diperoleh hasil perbandingan antara solusi numerik dari persamaan diferensial nonlinier *advance-delay* (1.1) dengan solusi eksak (5.2), sebagaimana yang diberikan pada Gambar 1. Dari Gambar 1 dapat dilihat bahwa terdapat kesesuaian yang sangat baik antara solusi eksak dengan solusi numeriknya.

Daftar Pustaka

[1] Bartle, Robert G., Donald R. Sherbert. 2011. *Introduction to Real Analysis*. Edisi ke-4. John Wiley and Son, Urbana-Champaign.

[2] Chi, Henjin., Jonathan, Bell dan Brian, Hassard. 1986. Numerical Solution of A Nonlinear Advance-Delay-Differential Equation from Nerve Conduction Theory. *J. Math Biol.*, **4**: 583 – 601.

[3] Mathews, John H., K. D. Fink. 1992. *Numerical Methods for Computer Science, Engineering, and Mathematics*. Edisi ke-2. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

[4] Melvin, T.R.O, dkk. 2007. *Travelling solitary waves in the discrete Schrödinger equation with saturable nonlinearity: Existence, stability and dynamics*. ScienceDirect.

[5] Pudjaprasetya, Sri Redjeki. 2009. Diktat Kuliah Persamaan Diferensial, Institut Teknologi Bandung. Bandung.

[6] Rustichini, A. 1989. Functional Differential Equations of Mixed Type. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **1**: 121 – 143.

[7] Rustichini, A. 1989. Hopf Bifurcation for Functional Differential Equations of Mixed Type. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **1**: 145 – 177.