STABILISASI SISTEM LINIER POSITIF MENGGUNAKAN *STATE FEEDBACK*

ERIN DWI FENTIKA, ZULAKMAL

*Program Studi Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 email: erinfentika@gmail.com*

Abstract. Dalam makalah ini dikaji proses menstabilkan suatu sistem linier positif menggunakan *state feedback*. Suatu sistem linier dikatakan dapat distabilkan jika terdapat kontrol $\mathbf{u} = -K_s \mathbf{x}$, untuk suatu matriks K_s sedemikian sehingga sistem $\dot{\mathbf{x}} = (A - BK_s) \mathbf{x}$ adalah stabil, artinya matriks K_s dipilih sedemikian sehingga bagian riil dari semua nilai eigen matriks $A - BK_s$ adalah negatif.

Kata Kunci: State feedback, kestabilan sistem, positif, nilai eigen

1. PENDAHULUAN

Diberikan sistem kontrol linier sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.1)$$

dimana $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Jika matriks A dan B bergantung terhadap waktu, maka sistem (1.1) disebut sistem kontrol linier *time varying*.

Sistem (1.1) dikatakan positif jika untuk setiap $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^m$ dan untuk setiap $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_+^n$ dan $t \geq 0$, maka $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}_+^n$. Dalam [3] dinyatakan bahwa sistem (1.1) adalah positif jika dan hanya jika A adalah suatu matriks Metzler, yaitu $a_{ij} \geq 0$ untuk setiap $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ dan $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$.

Salah satu kajian dalam sistem kontrol adalah mengenai kestabilan sistem tersebut. Sistem (1.1) dikatakan stabil jika $t \rightarrow \infty$ mengakibatkan $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$. Salah satu kriteria untuk menentukan kestabilan sistem (1.1) adalah kriteria nilai eigen. Sistem (1.1) adalah stabil jika bagian riil dari semua nilai eigen matriks A adalah negatif. Dengan demikian, sistem (1.1) adalah positif dan stabil jika A adalah Metzler, $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ dan bagian riil dari semua nilai eigen matriks A adalah negatif.

Sistem (1.1) yang tidak stabil dikatakan dapat distabilkan jika terdapat kontrol $\mathbf{u} = -K_s \mathbf{x}$ untuk suatu $K_s \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sedemikian sehingga sistem

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK_s) \mathbf{x} \quad (1.2)$$

adalah stabil, artinya matriks K_s dipilih sedemikian sehingga bagian riil dari semua nilai eigen matriks $A - BK_s$ adalah negatif. Matriks K_s disebut matriks *feedback* dan vektor $\mathbf{u}$ dikatakan kontrol yang menstabilkan sistem (1.1). Dalam makalah ini dikaji syarat untuk matriks $K_s \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ sedemikian sehingga sistem (1.2) adalah positif dan stabil.

2. Pembahasan

Lema berikut diperlukan untuk membuktikan hasil utama.

Lema 2.1. [2] *Suatu matriks Metzler $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ adalah stabil jika dan hanya jika*

$$\exists \mathbf{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n) \text{ sedemikian sehingga } A\mathbf{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n). \quad (2.1)$$

Selain itu, jika A stabil maka setiap submatriks utama dari A juga stabil.

Lema 2.2. [2] *Tidak ada $K_s \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$ sedemikian sehingga sistem positif dengan input tunggal yang tidak stabil (1.1) dapat distabilkan.*

Bukti. Misalkan ada $K_s \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$ sedemikian sehingga sistem positif dengan input tunggal yang tidak stabil (1.1) dapat distabilkan, maka $(A - BK_s)$ adalah matriks Metzler stabil. Jelas bahwa $-BK_s \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, dan notasikan $-BK_s = A^+ = [a_{ij}^+]$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Berdasarkan Lema 2.1, terdapat

$$\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]^T \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$$

sedemikian sehingga $-(A + A^+)\mathbf{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$, yaitu

$$\begin{aligned} 0 &< -d_1 a_{i1} - \dots - d_n a_{in} - d_1 a_{i1}^+ - \dots - d_n a_{in}^+, \\ &\leq -d_1 a_{i1} - \dots - d_n a_{in}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Tetapi, karena A tidak stabil maka berdasarkan Lema 2.1, untuk setiap $d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ terdapat suatu i sedemikian sehingga $-d_1 a_{i1} - \dots - d_n a_{in} \leq 0$ yang bertentangan dengan (2.1). $\square$

Teorema 2.3. [2] *Misalkan sistem (1.1) adalah positif dan*

$$K_s = \begin{bmatrix} k_s^{(1)} & k_s^{(2)} & \dots & k_s^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{1 \times n} \quad (2.3)$$

didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} k_s^{(i)} &> \frac{a_{ii}}{b_i}, \text{ jika } b_j = 0, \forall j \neq i, \\ k_s^{(i)} &= \min_{j \neq i, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{ji}}{b_j} \right\}, \text{ untuk hal lainnya,} \end{aligned} \quad (2.4)$$

untuk $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jika $b_i \neq 0$ dan $b_j = 0$ untuk setiap $j \neq i$, $j, i \in \{1, \dots, n\}$, maka K_s yang didefinisikan dalam (2.4) membuat matriks $A - BK_s$ menjadi matriks Metzler stabil jika dan hanya jika submatriks $A^{(i)}$ adalah stabil.

Bukti. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan bahwa $b_1 \neq 0$.

($\Rightarrow$) Misalkan terdapat suatu $K_s \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$ sedemikian sehingga $A - BK_s$ adalah suatu matriks Metzler stabil, maka submatriks $(A - BK_s)^{(1)}$ dan $A^{(1)}$ adalah sama, dan berdasarkan Lema 2.1 mestilah $A^{(1)}$ stabil.

($\Leftarrow$) Misalkan submatriks $A^{(1)}$ adalah stabil, maka berdasarkan Lema 2.1 terdapat

$$\mathbf{d}' = [d_2 \ \dots \ d_n] \in \text{int}(\mathbb{R}_+^{n-1})$$

sedemikian sehingga

$$-A^1 \mathbf{d}' \in \text{int}(\mathbb{R}_+^{n-1}),$$

yaitu untuk suatu $\delta_j > 0, j \in \{2, \dots, n\}$ berlaku

$$-(a_{j2}d_2 + a_{j3}d_3 + \dots + a_{jn}d_n) > \delta_j.$$

Misalkan $\delta = \min_{i=2, \dots, n} \{\delta_j\}$ dan $a = \max_{j=2, \dots, n} \{a_{j1}\}$. Selanjutnya, jika $a = 0$, maka pilih $d_1 = 1$; dan jika $a \neq 0$, maka pilih $d_1 \in (0, \frac{\delta}{a})$. Dengan pilihan ini, maka (2.1) terpenuhi untuk baris $2, \dots, n$. Dengan pemilihan d_1 ini dan $k_s^i = 0$ untuk $i \neq 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} & -(a_{11} - k_s^1 b_1)d_1 - (a_{12}d_2 + \dots + a_{1n}d_n) \geq \\ & k_s^1 b_1 d_1 - (|a_{11}| d_1 + a_{12}d_2 + \dots + a_{1n}d_n) > 0, \end{aligned}$$

sehingga

$$k_s^1 > \frac{|a_{11}| d_1 + a_{12}d_2 + \dots + a_{1n}d_n}{b_1 d_1} \geq 0$$

dan

$$k_s^i = 0, i = 2, \dots, n.$$

yang memberikan hasil yang diinginkan, yaitu

$$-(a_{11} - k_s^1 b_1)d_1 - (a_{12}d_2 + \dots + a_{1n}d_n) > 0 \quad \square$$

Berikut ini akan diberikan beberapa contoh yang mengilustrasikan Teorema 2.3.

Contoh 2.4. Selidiki apakah sistem linier positif berikut dapat distabilkan atau tidak.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (2.5)$$

Misalkan $K_s = [k_s^1 \ k_s^2 \ k_s^3]$. Dari persamaan (2.5) terlihat bahwa $b_1 = b_2 = 0$. Untuk $i = 1$,

$$k_s^1 = \min_{j \neq 1, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{31}}{b_3} \right\} = 2.$$

Untuk $i = 2$,

$$k_s^2 = \min_{j \neq 2, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{32}}{b_3} \right\} = 1.$$

Untuk $i = 3$,

$$\begin{aligned} & k_s^3 > \frac{a_{33}}{b_3} \\ & k_s^3 > 0,5, \\ & \text{pilih } k_s^3 = 1. \end{aligned}$$

Sehingga $K_s = [2 \ 1 \ 1]$. Karena $A^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ adalah stabil, maka berdasarkan Teorema 2.3,

$$A - BK_s = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [2 \ 1 \ 1] = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks Metzler stabil dengan nilai-nilai eigen $-1, -1, -0,5$. Jadi sistem tersebut dapat distabilkan. Amati bahwa submatriks $(A - BK)^{(3)} = A^{(3)}$.

Contoh 2.5. Selidiki apakah sistem linier positif berikut dapat distabilkan atau tidak.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2.6)$$

Misalkan $K_s = [k_s^1 \ k_s^2 \ k_s^3 \ k_s^4]$. Dari persamaan (2.6) terlihat bahwa $b_1 = b_2 = b_4 = 0$.

Untuk $i = 1$,

$$k_s^1 = \min_{j \neq 1, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{31}}{b_3} \right\} = 1.$$

Untuk $i = 2$,

$$k_s^2 = \min_{j \neq 2, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{32}}{b_3} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Untuk $i = 3$,

$$\begin{aligned} k_s^3 &> \frac{a_{33}}{b_3} \\ k_s^3 &> 0,5, \\ \text{pilih } k_s^3 &= 1. \end{aligned}$$

Untuk $i = 4$,

$$k_s^4 = \min_{j \neq 4, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{34}}{b_3} \right\} = \frac{1}{2}.$$

Sehingga $K_s = \left[1 \ \frac{1}{2} \ 1 \ \frac{1}{2} \right]$. Karena $A^{(3)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ adalah stabil, maka

berdasarkan Teorema 2.3,

$$A - BK_s = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

merupakan matriks Metzler stabil dengan nilai-nilai eigen $-2.9466 + 0.8297i$, $-2.9466 - 0.8297i$, -0.1067 , -1.0000 . Jadi sistem tersebut dapat distabilkan. Amati bahwa submatriks $(A - BK)^{(3)} = A^{(3)}$.

3. Kesimpulan

Misalkan matriks

$$K_s = \begin{bmatrix} k_s^{(1)} & k_s^{(2)} & \dots & k_s^{(n)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$$

didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} k_s^{(i)} &> \frac{a_{ii}}{b_i}, \text{ jika } b_j = 0, \forall j \neq i \\ k_s^{(i)} &= \min_{j \neq i, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{ji}}{b_j} \right\}, \text{ untuk hal lainnya,} \end{aligned} \quad (3.1)$$

dengan $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Jika sistem (1.1) adalah positif dan $b_i \neq 0$ dan $b_j = 0$ untuk setiap $j \neq i$, $j, i \in \{1, \dots, n\}$, maka K_s yang didefinisikan dalam (3.1) membuat matriks $A - BK_s$ menjadi matriks Metzler stabil jika dan hanya jika submatriks $A^{(i)}$ adalah stabil.

Daftar Pustaka

- [1] D. Luenburger. 1979. *Introduction to Dynamic System: Theory, Models and Application*. Wiley. New York
- [2] Davison, E. J. dan Roszak, B. 2009. *Necessary and Sufficient Condition for Stability of Positive LTI Systems*. 2nd edition. New York: McGraw-Hill
- [3] Farina, L. dan Rinaldi, S. 2000. *Positive Linear Systems : Theory and Applications*. Wiley. New York
- [4] Kaczorek, T. 2001. *Positive 1D and 2D Systems Metzler Matrices*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg