Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **1** Hal. 142 – 147
ISSN : 2303–291X

ORDER UNSUR DARI GRUP S_4

FEBYOLA, YANITA, MONIKA RIANTI HELMI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : 15febyola@gmail.com

Abstrak. Tulisan ini membahas tentang order unsur dari suatu grup berhingga. Grup berhingga yang digunakan adalah grup simetri S_4. Adapun tujuan dari penulisan ini adalah untuk melihat sifat-sifat yang dimiliki oleh order dari unsur di grup S_4 dan kaitannya dengan pembentukan grup dari himpunan yang dibangun oleh suatu unsur. Selanjutnya hubungan antara *cycle-cycle* pada suatu permutasi dalam S_4 yang berorder prima dan kaitannya dengan produk *cycle* yang prima juga dibahas dalam tulisan ini.

Kata Kunci: Order unsur, permutasi, cycle dari permutasi

1. Pendahuluan

Dalam teori aljabar abstrak dikenal adanya teori tentang grup. Grup merupakan himpunan dengan operasi biner dan menggunakan beberapa syarat. Pada struktur grup ini dikenal adanya order dari suatu unsur. Order dari unsur di grup adalah suatu periode dimana unsur tersebut kembali ke unsur identitas sebanyak k bilangan positif.

Ada beberapa sifat yang terkait dalam order dari unsur suatu grup. Sifat-sifat ini meliputi setiap unsur dari suatu grup yang memiliki order ber-hingga maka himpunan $\langle g \rangle$ merupakan himpunan berhingga dan membentuk grup yang berhingga, setiap unsur dari suatu grup yang membentuk $\langle g \rangle$ memiliki jumlah unsur n yang mana unsur yang berpangkat n menjadi unsur identitas, dan sebagainya. Untuk mendeskripsikan sifat-sifat ini diberikan sebuah ilustrasi yaitu pada grup simetri S_4 dan sifat-sifat order yang melekat pada S_4 yang dikuatkan dengan pembahasan order dari unsur grup.

2. Tinjauan Teori

2.1. *Pengertian dan Sifat-Sifat Dasar Grup*

Definisi 2.1. [*3*] *Sebuah grup $\langle G, * \rangle$ adalah sebuah himpunan tak kosong G, tertutup terhadap suatu operasi biner $*$, sedemikian sehingga aksioma berikut dipenuhi:*

(1) Operasi biner $*$ asosiatif.
(2) Terdapat sebuah elemen e di G sedemikian sehingga $e * x = x * e = x$ untuk setiap $x \in G$. (Elemen e ini adalah sebuah ***elemen identitas*** *untuk $*$ di G.)*

(3) Untuk setiap x di G, terdapat sebuah elemen x' di G sedemikian sehinga $x' * x = x * x' = e$. (Elemen x' adalah sebuah invers dari x dengan berdasar pada operasi $*$.)

Definisi 2.2. [4] *Jika sebuah subhimpunan H dari sebuah grup G membentuk grup dengan operasi biner yang sama dengan G, dikatakan bahwa H adalah subgrup dari G.*

Teorema 2.3. [5] *Sebuah subhimpunan tak kosong H dari sebuah grup G adalah sebuah subgrup dari G jika dan hanya jika*

(1) $a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$.
(2) $a \in H$ berlaku $a^{-1} \in H$.

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai grup simetris yang didahului dengan penjelasan tentang fungsi permutasi.

Definisi 2.4. [3] *Sebuah fungsi atau pemetaan ϕ dari himpunan A ke himpunan B adalah sebuah aturan yang mengaitkan setiap elemen a dari A tepat ke satu elemen b dari B. Dikatakan ϕ memetakan a ke b, dan ϕ memetakan A ke B.*

Definisi 2.5. [3] *Sebuah fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah* ***satu-satu*** *jika setiap elemen dari B mempunyai paling banyak satu elemen dari A dipetakan ke B, dan* ***pada*** *jika setiap elemen dari B mempunyai paling sedikit satu elemen dari A dipetakan ke B.*

Definisi 2.6. [5] *Jika S adalah sebuah himpunan tak kosong maka $A(S)$ adalah himpunan semua pemetaan satu-satu dan pada dari S ke dirinya sendiri.*

Teorema 2.7. [5] *Jika σ, τ, μ adalah elemen-elemen dari $A(S)$, maka*

(1) $\sigma \circ \tau$ berada di $A(S)$.
(2) $(\sigma \circ \tau) \circ \mu = \sigma \circ (\tau \circ \mu)$.
(3) Terdapat sebuah elemen 1 (pemetaan identitas) di $A(S)$ sedemikian sehingga $\sigma \circ 1 = 1 \circ \sigma = \sigma$.
(4) Terdapat sebuah elemen $\sigma^{-1} \in A(S)$ sedemikian sehingga $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = 1$.

Definisi 2.8. [3] *Sebuah permutasi dari himpunan A adalah sebuah fungsi $\phi : A \rightarrow A$ yang satu-satu dan pada. Dengan kata lain, sebuah permutasi dari A adalah fungsi satu-satu dan pada dari A ke A.*

Definisi 2.9. [3] *Misal A himpunan berhingga $\{1, 2, \cdots, n\}$. Grup dari semua permutasi A adalah grup simetris berderajat n, dan dilambangkan dengan S_n.*

Grup S_n mempunyai $n!$ elemen, dimana

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(3)(2)(1).$$

Pada aljabar, permutasi dari himpunan berhingga biasanya diberikan oleh sebuah pengurutan dari elemen domain dan nilai fungsinya yang bersesuai- an. Misalnya, didefinisikan sebuah permutasi α dari himpunan $\{1, 2, 3, 4\}$ dengan menetapkan

$$\alpha(1) = 2, \alpha(2) = 3, \alpha(3) = 1, \alpha(4) = 4.$$

Sebuah cara yang lebih mudah untuk menyatakan korespondensi ini adalah dengan menulis α dalam bentuk *array* yaitu

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 2\,3\,1\,4 \end{pmatrix},$$

atau dalam notasi *cycle* $\alpha = (123)(4) = (123)$.

Definisi 2.10. [6] *Misal* $i_1, i_2, \cdots, i_r, (r \leq n)$ *merupakan unsur-unsur yang berbeda dari* $I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, *maka* $(i_1 i_2 i_3 \cdots i_r)$ *menyatakan permutasi yang memetakan* $i_1 \longmapsto i_2, i_2 \longmapsto i_3, \cdots, i_{r-1} \longmapsto i_r, i_r \longmapsto i_1$, *serta memetakan setiap unsur-unsur lain dari* I_n *pada dirinya sendiri.* $(i_1 i_2 \cdots i_r)$ *disebut* cycle *dengan panjang* r *atau sebuah* $r - cycle$*:* $2 - cycle$ *disebut transposisi.*

Contoh 2.11. Permutasi

$$\tau = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4 \\ 4\,1\,2\,3 \end{pmatrix}$$

adalah sebuah *4-cycle*: $\tau = (1432) = (4321) = (3214) = (2143)$. Jika σ adalah *3-cycle*(125), maka $\sigma\tau = (125)(1432) = (1435)$ (ingat: permutasi adalah fungsi dan $\sigma\tau$ berarti τ diikuti oleh σ; dengan cara yang sama $\tau\sigma = (1432)(125) = (2543)$ sedemikian sehingga $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

Definisi 2.12. [7] *Cycle-cycle* $(a_1 \ \cdots \ a_m)$ *dan* $(b_1 \ \cdots \ b_k)$ *adalah saling lepas jika* $\{a_1, \cdots, a_m\} \cap \{b_1, \cdots, b_k\} = \varnothing$.

Teorema 2.13. [4] *Setiap permutasi dari himpunan berhingga dapat ditulis sebagai sebuah* cycle *atau sebuah produk dari* cycle *saling lepas.*

Teorema 2.14. [4] *Jika pasangan* cycle $\alpha = (a_1 a_2 \cdots a_m)$ *dan* $\beta = (b_1 b_2 \cdots b_n)$ *tidak memiliki entri yang sama, maka* $\alpha\beta = \beta\alpha$.

2.2. *Order dan Sifat-Sifat Order Unsur dari Grup*

Definisi 2.15. [3] *Jika* G *adalah sebuah grup berhingga, maka order* $|G|$ *dari* G *adalah jumlah elemen di* G. *Secara umum, untuk sebarang himpunan berhingga* S, $|S|$ *adalah jumlah elemen di* S.

Definisi 2.16. [4] *Order dari suatu elemen* g *pada suatu grup* G *adalah bilangan bulat positif terkecil* n *sedemikian sehingga* $g^n = e$. *(Dalam notasi penjumlahan, ini menjadi* $ng = 0$.*) Jika tidak terdapat bilangan bulat yang demikian,* g *dikatakan memiliki order tak hingga. Order dari suatu elemen* g *dilambangkan dengan* $|g|$.

Definisi 2.17. [2] *Suatu grup* G *adalah siklik jika terdapat* $g \in G$ *sedemikian sehingga* $G = \langle g \rangle = \{g^n | n \in \mathbb{Z}\}$.

Teorema 2.18. [6] *Misalkan* G *adalah grup dan* $g \in G$, *maka* g *memiliki order berhingga di* G *jika dan hanya jika* $\langle g \rangle$ *adalah grup berhingga.*

Teorema 2.19. [6] *Misal* $g^n = e$ *untuk suatu* $n \geq 1$, *dengan* n *dipilih sekecil mungkin, maka*

(1) $\langle g\rangle = \{e, g, g^2, \cdots, g^{n-1}\}$.
(2) $|\langle g\rangle| = n$, *dengan pangkat-pangkat pada bagian* (1) *saling berbeda.*

Teorema 2.20. [6] *Misal* $g \in G$ *dan* g *mempunyai order* n, *maka* $g^k = e$ *jika dan hanya jika* $n|k$.

Akibat 2.21. [6] *Misal* $g \in G$ *mempunyai order* n. *Untuk* $k, l \in \mathbb{Z}$, $g^k = g^l$ *jika dan hanya jika* $k \equiv l \mod n$.

3. Grup Simetri S_4

Grup simetri S_4 adalah grup semua permutasi dari empat elemen. Definisikan S_4 sebagai himpunan semua fungsi satu-satu dari $\{1, 2, 3, 4\}$ ke dirinya sendiri. Grup simetri S_4 dibawah operasi komposisi mempunyai $4! = 24$ elemen.

Elemen-elemen dari S_4 ditetapkan sebagai berikut
$f_0 = (1), f_1 = (34), f_2 = (23), f_3 = (234), f_4 = (243), f_5 = (24), f_6 = (12),$
$f_7 = (12)(34), f_8 = (123), f_9 = (1234), f_{10} = (1243), f_{11} = (124), f_{12} = (132),$
$f_{13} = (1342), f_{14} = (13), f_{15} = (134), f_{16} = (13)(24), f_{17} = (1324), f_{18} = (1432),$
$f_{19} = (142), f_{20} = (143), f_{21} = (14), f_{22} = (1423)$, dan $f_{23} = (14)(23)$.

Berdasarkan Teorema 2.7 diperoleh :

(1) Komposisi di S_4 bersifat tertutup.
(2) Komposisi di S_4 bersifat asosiatif dimana untuk setiap $x, y, z \in S_4$ berlaku $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
(3) Terdapat elemen identitas f_0 sehingga $f_0 \circ x = x \circ f_0 = x$ untuk setiap $x \in S_4$.
(4) Terdapat elemen invers dari x yakni x' yang mana $x' \circ x = x \circ x' = f_0$ untuk setiap $x \in S_4$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa himpunan S_4 adalah sebuah grup terhadap operasi $\circ$.

4. Order Unsur dari Grup S_4

Misalkan $\sigma = (a_1 a_2 \cdots a_r)$ adalah suatu r-*cycle*, maka $\sigma^n = (a_1 a_2 \cdots a_r)^n$ ini berarti a_i berganti sebanyak n kali dengan $n \geq 1$ dan n adalah nilai terkecil sedemikian sehingga $\sigma^n = e$ dengan $n = r$. Akibatnya, suatu $r - cycle$ mempunyai order r.

Teorema 4.1. [1] *Untuk sebarang* $\sigma \in S_m$, *dapat dinyatakan sebagai sebuah produk dari* cycle-cycle *saling lepas, yaitu*

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_t.$$

dimana σ_i *adalah* cycle *dengan panjang* r_i, $1 \leq i \leq t$. *Order dari* σ *merupakan kelipatan persekutuan terkecil* $[r_1, r_2, \cdots, r_t]$.

Bukti. Misalkan $\sigma = \sigma_1, \cdots, \sigma_t$ dengan σ_i adalah *cycle* saling lepas. Oleh karena *cycle* saling lepas adalah komutatif, maka

$$\sigma^a = \sigma_1^a \sigma_2^a \cdots \sigma_t^a,$$

untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, sehingga $\sigma^a = e$ jika dan hanya jika $\sigma_i^a = e$ untuk setiap i. Jika σ_i mempunyai order r_i, berdasarkan Teorema 2.20 maka σ_i^a merupakan identitas jika dan hanya jika $r_i|a$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\sigma^a = e &\iff \text{untuk setiap } \sigma_i^a = e, \\
&\iff r_i|a \text{ untuk semua } i, \\
&\iff [r_1, r_2, \cdots, r_t]|a,
\end{aligned}$$

dimana $[r_1, r_2, \cdots, r_t]$ menyatakan kelipatan persekutuan terkecil dari r_i, yang merupakan panjang dari *cycle* yang saling lepas σ_i. Oleh karena itu order dari σ adalah $[r_1, r_2, \cdots, r_t]$. □

Akibat 4.2. [*1*] *Misalkan p adalah sebuah bilangan prima. Sebuah permutasi $\sigma \in S_n$ mempunyai order p jika dan hanya jika permutasi tersebut merupakan sebuah produk dari* p-cycle *yang saling lepas.*

Bukti. Misal dekomposisi dari σ menjadi *cycle* saling lepas adalah $\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t$, dengan semua σ_i tak trivial. Misalkan r_i order dari σ_i dan $r_i > 1$. Berdasarkan Teorema 3.2.1, order dari $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t$ adalah $[r_1, \cdots, r_t]$ yang merupakan kelipatan persekutuan terkecil dari r_i. Misalkan $[r_1, \cdots, r_t] = p$ dengan p prima. Setiap r_i adalah sebuah faktor dari p dengan p lebih besar dari 1, oleh karena p prima, akibatnya setiap r_i adalah p. Sebaliknya, misalkan $\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t$ merupakan produk dari *p-cycle* saling lepas, maka setiap r_i adalah p dimana r_i merupakan order dari σ_i. Karena order dari σ adalah kelipatan persekutuan terkecil dari $[r_1, \cdots, r_t]$ yaitu p, akibatnya p adalah prima. Sehingga σ mempunyai order p jika dan hanya jika σ merupakan sebuah produk dari *p-cycle* saling lepas. □

Order dari unsur-unsur S_4 ditunjukkan sebagai berikut.

Order	Unsur
1	f_0
2	$f_1, f_2, f_5, f_6, f_7, f_{14}, f_{16}, f_{21}, f_{23}$
3	$f_3, f_4, f_8, f_{11}, f_{12}, f_{15}, f_{19}, f_{20}$
4	$f_9, f_{10}, f_{13}, f_{17}, f_{18}, f_{22}$

5. Kesimpulan

(1) Untuk setiap g di S_4 memiliki order berhingga. Himpunan $\langle g \rangle$ yang dibangun oleh unsur dari S_4 adalah berhingga dan himpunan $\langle g \rangle$ tersebut membentuk grup yang berhingga.
(2) Untuk setiap g di S_4 yang membentuk himpunan $\langle g \rangle$ yang memiliki jumlah unsur n yang mana $g^n = e$.
(3) Untuk setiap g di S_4 dimana g mempunyai order n, $g^k = e$ jika dan hanya jika $n|k$.
(4) Untuk setiap g di S_4 memenuhi $g^k = g^l$ jika dan hanya jika $k \equiv l \mod n$ untuk $k, l \in \mathbb{Z}$.

(5) Untuk sebarang σ di S_4, ditulis sebagai sebuah produk dari *cycle* saling lepas.

$$\sigma = \sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_t.$$

dimana σ_i adalah *cycle* dengan panjang r_i, $1 \leq i \leq t$. Order dari σ merupakan kelipatan persekutuan terkecil $[r_1, r_2, \cdots, r_t]$.

(6) Terdapat 17 unsur di S_4 yang mempunyai order prima dan merupakan produk dari *p-cycle* yang saling lepas yaitu $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_{11}$, $f_{12}, f_{14}, f_{15}, f_{16}, f_{19}, f_{20}, f_{21}$, dan f_{23}.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Dr. Admi Nazra, bapak Efendi, M.Si, dan bapak Dr. Effendi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Conrad, K. 2014. *Orders of Elements in a Group.* www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/grouptheory/order.pdf

[2] Dummit, D.S. dan R.M. Foote. 1991. *Abstract Algebra.* A Simon & Schuster Company, New Jersey

[3] Fraleigh, J.B. 1993. *A First Course in Abstract Algebra.* Edisi ke-5. Addison-Wesley Publishing Company, United States of America

[4] Gallian, J.A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra.* Edisi ke-7. Brooks/Cole, Cengage Learning, United States of America

[5] Herstein, I.N. 1975. *Topics in Algebra.* Edisi ke-2. John Wiley & Sons, New York

[6] Hungerford, T.W. 1974. *Algebra.* Springer-Verlag New York Inc, New York

[7] Millewski, E.G. 1989. *The Essentials of Group Theory II.* Research and Education Association, New Jersey