Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **1** Hal. 148 – 152
ISSN : 2303–291X

PENENTUAN *RAINBOW CONNECTION NUMBER* PADA HASIL OPERASI *CARTESIAN PRODUCT* TERHADAP GRAF LINGKARAN DAN GRAF BIPARTIT LENGKAP DENGAN GRAF LINTASAN

RESNITA YURI
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : resnita.yuri12@gmail.com

Abstrak. Misalkan terdapat graf terhubung taktrivial G. Jika setiap sisi-sisi G diberi pewarnaan sehingga sebarang dua titik di G dihubungkan oleh suatu lintasan yang memiliki warna berbeda disetiap sisi, maka G disebut *rainbow connected*. Pewarnaan sisi dari G ditulis $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}; k \in \mathbb{N}$. *Rainbow connection number* dari graf G, dinotasikan dengan $rc(G)$, adalah minimum dari banyaknya warna yang dibutuhkan untuk mewarnai G sehingga G *rainbow connected*. *Cartesian product* terhadap dua graf G_1 dengan G_2 dinotasikan dengan $G_1 \times G_2$.

Dalam makalah ini akan dibahas kembali makalah [1] tentang penentuan bilangan *rainbow connection* dari graf $P_n \times K_{2,2}$ dan $P_3 \times C_n$. Diperoleh bahwa $rc(P_n \times K_{2,2}) = n + 1$ dan $rc(P_3 \times C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$.

Kata Kunci: Graf lingkaran, Graf lintasan, Graf bipartit lengkap, Rainbow connection number

1. Pendahuluan

Misalkan G adalah graf terhubung tak-trivial. Definisikan pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}; k \in \mathbb{N}$, dimana sisi G yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu lintasan $u - v \in G$ dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi pada lintasan yang memiliki warna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*.

Dalam tulisan ini akan dibahas tentang *rainbow connection number* pada graf hasil operasi *cartesian product* antara graf lintasan dengan graf lingkaran, serta antara graf lintasan dengan graf bipartit lengkap $K_{2,2}$.

Misalkan terdapat graf terhubung G dengan ukuran m. Ukuran m menyatakan banyaknya sisi yang ada dalam graf G. Hubungan antara $diam(G), rc(G), src(G)$ dan ukuran m dijelaskan pada proposisi berikut.

Proposisi 1.1. [3] *Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial berukuran m. Jika $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}, k \in \mathbb{N}$ merupakan pewarnaan* rainbow coloring*, maka*

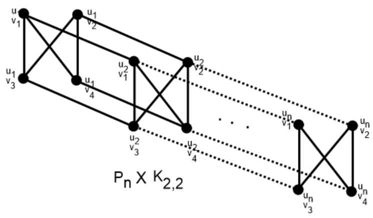
$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

2. *Rainbow Connection Number* pada Hasil Operasi *Cartesian Product* Terhadap Graf Lingkaran dan Graf Bipartit Lengkap, dengan Graf Lintasan

Pada Teorema 2.1 diberikan bilangan *Rainbow Connection* untuk graf hasil *Cartesian Product* graf bipartit lengkap $K_{2,2}$ dengan graf lintasan P_n, untuk $n \geq 2$.

Teorema 2.1. [1] *Untuk* $n \geq 2$*, rainbow connection number untuk graf* $(P_n \times K_{2,2})$ *adalah* $n+1$.

Bukti. Perhatikan bentuk graf $P_n \times K_{2,2}$ pada Gambar 1 berikut. Dapat dilihat



Gambar 1. Hasil operasi $P_n \times K_{2,2}$

bahwa graf $G \simeq P_n \times K_{2,2}$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(P_n \times K_{2,2}) &= \{a_i, b_i, c_i, d_i; 1 \leq i \leq n\}, \\ E(P_n \times K_{2,2}) &= \{a_ib_i, a_id_i, b_ic_i, c_id_i; 1 \leq i \leq n\} \\ &\bigcup \{a_ia_{i+1}, b_ib_{i+1}, c_ic_{i+1},\ d_id_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}, \end{aligned}$$

dimana $a_1 = u_1v_1$, $b_1 = u_1v_3$, $c_1 = u_1v_2$, $d_1 = u_1v_4$, $a_2 = u_2v_1$, $b_2 = u_2v_3$, $c_2 = u_2v_2$, $d_2 = u_2v_4$, $\cdots$, $a_n = u_nv_1$, $b_n = u_nv_3$, $c_n = u_nv_2$, $d_n = u_nv_4$. Dapat dilihat bahwa $p = |V(G)| = 4n$ dan $q = |E(G)| = 8n - 4$.

Selanjutnya ditentukan jarak masing-masing titik pada graf $P_n \times K_{2,2}$. Himpunan $d(x,y)$ dimana x, y adalah sebarang titik pada graf $P_n \times K_{2,2}$ adalah $d(x,y) = \{1, 2, \cdots, n+1\}$. Maka diperoleh bahwa

$$diam(P_n \times K_{2,2}) = \max\{d(x,y) | x, y \in V(P_n \times K_{2,2})\} = n+1.$$

Karena $diam(P_n \times K_{2,2}) = n+1$ maka

$$rc(P_n \times K_{2,2}) \geq n+1. \tag{2.1}$$

Konstruksikan pewarnaan pada sisi-sisi graf $P_n \times K_{2,2}$, yang dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi pewarnaan $c : E(P_n \times K_{2,2}) \rightarrow \{1, 2, \cdots, n+1\}$ sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} 1,\ e = a_iv_i; e = b_iu_i; 1 \leq i \leq n, \\ 2,\ e = a_ib_i; e = u_iv_i; 1 \leq i \leq n, \\ j,\ e = a_ia_{i+1}; e = b_ib_{i+1}; e = u_iu_{i+1}; e = v_iv_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1;\ 3 \leq j \leq n+1. \end{cases}$$

Berdasarkan pewarnaan tersebut diperoleh bahwa

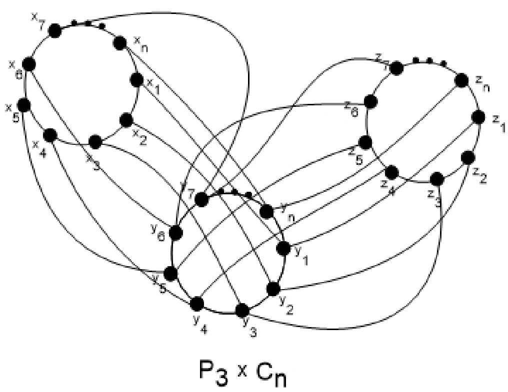
$$rc(P_n \times K_{2,2}) \leq n + 1. \tag{2.2}$$

Dari (2.1) dan (2.2) diperoleh bahwa $rc(P_n \times K_{2,2}) = n + 1$. □

Pada Teorema 2.2 diberikan bilangan *Rainbow Connection* untuk graf hasil *Cartesian Product* graf lingkaran C_n dengan graf lintasan P_3, untuk $n \geq 3$.

Teorema 2.2. [*1*] *Untuk* $n \geq 3$, rainbow connection number *untuk graf* $(P_3 \times C_n)$ *adalah* $\lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$.

Bukti. Perhatikan bentuk graf $P_3 \times C_n$ pada Gambar 2 berikut.



Gambar 2. $P_3 \times C_n$

Misalkan $V(P_3) = \{u_1, u_2, u_3\}$ dan $V(C_n) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Maka graf $H \simeq P_3 \times C_n$ mempunyai himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(P_3 \times C_n) = \{a_i, b_i, c_i; 1 \leq i \leq n\},$$
$$E(P_3 \times C_n) = \{a_ib_i, b_ic_i; 1 \leq i \leq n\} \bigcup \{a_ia_{i+1}, b_ib_{i+1}, c_ic_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\}$$
$$\bigcup \{a_na_1, b_nb_1, c_nc_1\},$$

dimana $a_1 = u_1v_1$, $b_1 = u_2v_1$, $c_1 = u_3v_1$, $a_2 = u_1v_2$, $b_2 = u_2v_2$, $c_2 = u_3v_2$, $\cdots$, $a_n = u_1v_n$, $b_n = u_2v_n$, $c_n = u_3v_n$. Dapat dilihat bahwa $p = |V(H)| = 3n$, $q = |E(H)| = 5n$.

Selanjutnya ditentukan jarak masing-masing titik pada graf $P_3 \times C_n$. Himpunan $d(x, y)$ dimana x, y adalah titik sebarang pada graf $P_3 \times C_n$ adalah $d(x, y) = \{1, 2, \cdots, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2\}$. Maka diperoleh bahwa

$$diam(P_3 \times C_n) = \max\{d(x, y)|x, y \in V(P_3 \times C_n)\} = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2.$$

Karena $diam(P_3 \times C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$ maka

$$rc(P_n \times K_{2,2}) \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2. \tag{2.3}$$

Konstruksikan pewarnaan pada sisi-sisi graf $P_3 \times C_n$, yang dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi pewarnaan $c : E(P_3 \times C_n) \to \{1, 2, \cdots, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2\}$ sebagai berikut.

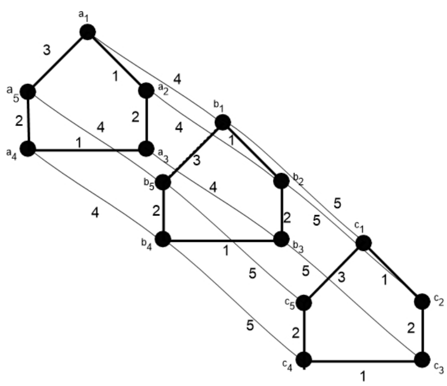
$$c(e) = \begin{cases} i, & e = a_i a_{i+1}; e = b_i b_{i+1}; e = c_i c_{i+1}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil, n \text{ genap}, \\ & e = a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i} a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i + 1}; e = b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i} b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i + 1}; e = c_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i} c_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i + 1}, \\ & 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, n \text{ genap}, \\ & e = a_i a_{i+1}; e = b_i b_{i+1}; e = c_i c_{i+1}; 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, n \text{ ganjil}, \\ & e = a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i - 1} a_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i}; e = b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i - 1} b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i}; e = c_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i - 1} c_{\lceil \frac{n}{2} \rceil + i}, \\ & 1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil - 2, n \text{ ganjil}, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, & e = a_{n-1} a_n; e = b_{n-1} b_1; c_{n-1} c_n; \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil, & e = a_n a_1; e = b_n b_1; e = c_n c_1, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1, & e = a_i b_i; 1 \leq i \leq n, \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2, & e = b_i c_i; 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan pewarnaan tersebut diperoleh bahwa

$$rc(P_3 \times C_n) \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2. \tag{2.4}$$

Dari (2.1) dan (2.2) diperoleh bahwa $rc(P_3 \times C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$. $\square$

Pewarnaan pada $(P_3 \times C_5)$ dapat dilihat pada Gambar 3.

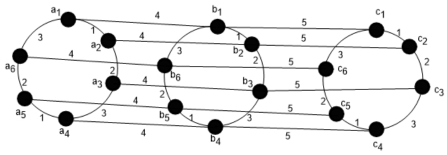


Gambar 3. $rc(P_3 \times C_5)$

Pewarnaan pada $(P_3 \times C_6)$ dapat dilihat pada Gambar 4.

3. Kesimpulan

Pada makalah ini telah dibahas kembali makalah [1] tentang penentuan bilangan *rainbow connection* dari graf $P_n \times K_{2,2}$ dan $P_3 \times C_n$. Diperoleh bahwa $rc(P_n \times K_{2,2}) = n + 1$ dan $rc(P_3 \times C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil + 2$.



Gambar 4. $rc(P_3 \times C_6)$

4. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, Bapak Dr. Effendi, Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Narwen, M.Si, dan Bapak Dr. Admi Nazra, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Arnasyitha, Yulianti. dan Dafik. Rainbow Connection Number Pada Operasi Graf. *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014*. Universitas Jember, hal. 83 – 87

[2] Bondy, J. A. dan U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications.* Macmillan. London

[3] G. Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, dan P. Zhang. 2008. Rainbow connection in graphs. *Math. Bohem.*, **133**(2) : 85 – 98

[4] Darmawan, R. N. 2015. *Analisis Rainbow Connection Number pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya.* Tesis S-2, tidak diterbitkan, Universitas Jember. Jember

[5] Harary, F. 1970. *Graph Theory.* Wesley Publishing Company. London

[6] Kitaev, S. dan Lozin,V. 2015. *Words and Graphs.* Springer. New York

[7] Li, Xueliang, and Liu, Sujuan, Rainbow Connection Number and Connectivity. 2012. *The Electronic Journal of Combinatorics* **19** : P20

[8] Li, X. dan Sun, Y.2012. *Rainbow Connection of Graphs.* Springer. New York.