Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **1** Hal. 153 – 160
ISSN : 2303–291X

PENENTUAN *RAINBOW CONNECTION NUMBER* PADA GRAF BUKU SEGIEMPAT, GRAF KIPAS, DAN GRAF TRIBUN

FITRI ANGGALIA
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : fitri.anggalia@gmail.com

Abstrak. Misalkan G adalah suatu graf terhubung tak trivial. Suatu pewarnaan $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}, k \in \mathbb{N}$ pada graf G adalah suatu pewarnaan sisi di G sedemikian sehingga setiap sisi bertetangga boleh berwarna sama. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan P adalah suatu lintasan dari u ke v. Suatu intasan P dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* dengan pewarnaan c jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ terdapat *rainbow path* dari u ke v. Jika terdapat k warna di G maka c adalah *rainbow k-coloring. Rainbow connection number* dari graf terhubung dinotasikan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected.*

Dalam makalah ini akan ditentukan *rainbow connection number* pada graf buku segiempat $\mathfrak{B}_n$ yang merupakan hasil dari operasi amalgamasi sisi pada graf *Cycle* C_4, graf Kipas F_n dengan $n \geq 2$ yang merupakan hasil dari operasi *joint* dari *Path* P_n dengan graf lengkap K_1, dan Graf $\mathfrak{T}_n = shack(tribun, n)$ yang merupakan hasil dari operasi *shackle* pada graf tribun.

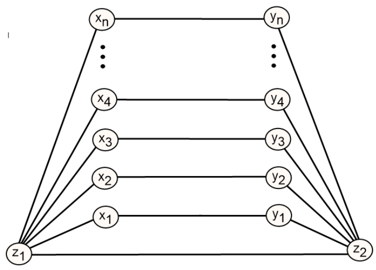
Kata Kunci: Rainbow connection number, amalgamasi sisi, graf buku segiempat, graf kipas, graf tribun

1. Pendahuluan

Rainbow connection pada graf pertama kali diperkenalkan pada tahun 2006 oleh Chartrand dkk [2]. Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial dan didefinisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}$ dengan $k \in N$, sedemikian sehingga dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu $u - v$ path P di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi di P yang memiliki warna sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path.* Minimum dari banyak warna sehingga suatu graf menjadi *rainbow connected* disebut dengan *rainbow connection number*, dinotasikan $rc(G)$.

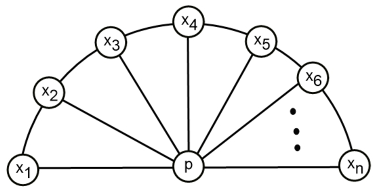
Konsep *rainbow connection* dapat digunakan untuk pengamanan pengiriman informasi rahasia antar pemerintah dan agen. Dalam hal ini, pemerintah dan agen tidak diizinkan untuk saling mencek informasi karena berhubungan dengan keamanan nasional, sehingga informasi kepada agen satu dan lainnya harus menggunakan sandi. Dengan demikian, akan terdapat satu atau lebih lintasan informasi untuk setiap dua agen dan harus dipastikan tidak ada sandi yang berulang. Kata sandi setiap lintasan harus berbeda, sehingga harus ditentukan banyaknya sandi yang dibutuhkan, agar terdapat satu lintasan yang aman antara dua agen. Situasi inilah yang dimodelkan menjadi konsep *rainbow connection number*. Pada makalah ini akan dibahas tentang *rainbow connection number* pada graf buku segiempat, graf kipas, dan graf tribun.

Graf Buku Segiempat $\mathfrak{B}_n$ merupakan hasil dari operasi amalgamasi sisi pada Graf *Cycle* C_4 [5] seperti pada Gambar 1. Graf Kipas F_n dengan $n \geq 2$ merupakan



Gambar 1. Graf Buku Segiempat $\mathfrak{B}_n$

hasil dari operasi *joint* dari Graf *Path* P_n dengan Graf Lengkap K_1 sehingga dapat dituliskan $P_n + K_1$ [5] seperti pada Gambar 1. Graf $\mathfrak{T}_n = shack(tribun, n)$ yang



Gambar 2. Graf Kipas F_n

merupakan hasil dari operasi *shackle* pada Graf Tribun [5] seperti pada Gambar 3.

Pada Proposisi 1.1 diberikan hubungan antara $diam(G), rc(G), src(G)$ dan banyak sisi m pada suatu graf terhubung G.

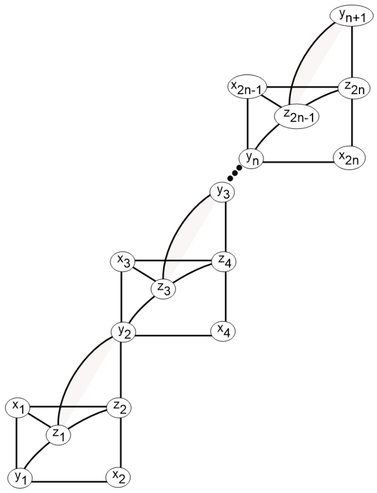
Proposisi 1.1. [2] *Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial berukuran m. Jika $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}, k \in \mathbb{N}$ merupakan* rainbow coloring*, maka*

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

2. Penentuan *Rainbow Connection Number* pada Graf Buku Segiempat, Graf Kipas, dan Graf Tribun

Pada Teorema 2.1 diberikan bilangan *rainbow connection* pada graf buku segiempat.

Teorema 2.1. [5] *Untuk $n \geq 1$* rainbow connection number *dari graf buku segiem-*



Gambar 3. graf $\mathfrak{T}_n = shack(tribun, n)$

.

pat $\mathfrak{B}_n$ *adalah*

$$rc(\mathfrak{B}_n) = \begin{cases} 2, & untuk\ n = 1, \\ 3, & untuk\ n = 2\ dan\ n = 3, \\ 4, & untuk\ n \geq 4. \end{cases}$$

Bukti. Graf buku segiempat $\mathfrak{B}_n$ adalah graf dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(\mathfrak{B}_n) = \{z_1, z_2, x_i, y_i,\ 1 \leq i \leq n\},$$
$$E(\mathfrak{B}_n) = \{z_1z_2\} \cup \{z_1x_i \cup z_2y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_iy_i; 1 \leq i \leq n\}.$$

Banyak titik pada graf $\mathfrak{B}_n$ yaitu $|V(\mathfrak{B}_n)| = 2(n) + 2$ dan banyak sisi pada graf $\mathfrak{B}_n$ yaitu $|E(\mathfrak{B}_n)| = 3(n) + 1$. Pandang beberapa kasus berikut.

Kasus 1. $n = 1$.
Definisikan $c_1 : E(\mathfrak{B}_n) \to \{1, 2\}$ sebagai berikut.

$$c_1(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = z_1x_1 \text{ dan } z_2y_1, \\ 2, & \text{jika } e = z_1z_2 \text{ dan } x_1y_1. \end{cases}$$

Berdasarkan pewarnaan tersebut dapat dilihat bahwa $rc(\mathfrak{B}_1) \leq 2$. Selanjutnya, dapat dilihat bahwa $diam(\mathfrak{B}_1) = 2$, sehingga berdasarkan Proposisi 1.1, berlaku $rc(\mathfrak{B}_1) \geq 2$. Maka diperoleh bahwa $rc(\mathfrak{B}_1) = 2$.

Kasus 2. $n = 2$.
Definisikan $c_2 : E(\mathfrak{B}_2) \to \{1, 2, 3\}$ sebagai berikut.

$$c_2(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = z_1x_1 \text{ dan } z_2y_1, \\ 2, & \text{jika } e = z_1x_2 \text{ dan } z_2y_2, \\ 3, & \text{jika } e = z_1z_2 \text{ dan } x_iy_i,\ \text{untuk } 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pewarnaan tersebut, jelas bahwa $rc(\mathfrak{B}_2) \leq 3$. Selanjutnya dapat dilihat bahwa $diam(\mathfrak{B}_2) = 3$, sehingga berdasarkan Proposisi 1.1, $rc(\mathfrak{B}_2) \geq 3$. Maka diperoleh bahwa $rc(\mathfrak{B}_2) = 3$.

Kasus 3. $n = 3$.
Definisikan $c_3 : E(\mathfrak{B}_3) \rightarrow \{1, 2, 3\}$ sebagai berikut.

$$c_3(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = z_1x_1, e = z_2y_1, e = x_3y_3 \text{ dan } z_1z_2, \\ 2, & \text{jika } e = z_1x_2, e = z_2y_2 \text{ dan } x_2y_2, \\ 3, & \text{jika } e = z_1x_3, e = z_2y_3 \text{ dan } x_1y_1. \end{cases}$$

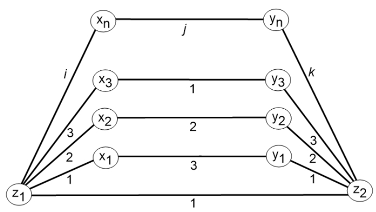
Berdasarkan definisi pewarnaan tersebut, jelas bahwa $rc(\mathfrak{B}_3) \leq 3$. Selanjutnya, dapat dilihat bahwa $diam(\mathfrak{B}_3) = 3$, sehingga berdasarkan Proposisi 1.1, $rc(\mathfrak{B}_3) \geq 3$. Maka diperoleh bahwa $rc(\mathfrak{B}_3) = 3$.

Kasus 4. $n \geq 4$.
Definisikan $c_4 : E(\mathfrak{B}_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sebagai berikut.

$$c_4(e) = \begin{cases} 1, & \text{jika } e = z_1x_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ 2, & \text{jika } e = z_2y_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ 3, & \text{jika } e = x_iy_i \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ 4, & \text{jika } e = z_1z_2. \end{cases}$$

Berdasarkan definisi pewarnaan tersebut, jelas bahwa $rc(\mathfrak{B}_n) \leq 4$. Selanjutnya, karena $diam(\mathfrak{B}_n) = 3$, maka berdasarkan Proposisi 1.1, $rc(\mathfrak{B}_n) \geq 3$.

Akan ditunjukkan bahwa $rc(\mathfrak{B}_n) \neq 3$. Misalkan c' adalah suatu *rainbow 3-coloring* dari $\mathfrak{B}_n$ untuk $n \geq 4$, dapat dilihat pada Gambar 4. Dengan memberi

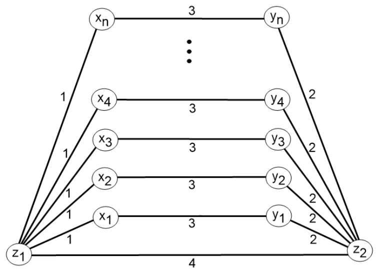


Gambar 4. $rc(\mathfrak{B}_n) = 3$ dengan $i \in \{1, 2, 3\}, j \in \{1, 2, 3\}, k \in \{1, 2, 3\}$

warna $c'(z_1x_n) = 1$, maka tidak terdapat *rainbow* $x_n - x_1$ *path* di $\mathfrak{B}_n$. Sementara jika $c'(z_1x_n) = 2$ maka tidak terdapat *rainbow* $x_n - x_2$ *path* di $\mathfrak{B}_n$. Jika $c'(z_1x_n) = 3$ maka tidak terdapat *rainbow* $x_n - x_3$ *path* di $\mathfrak{B}_n$. Selanjutnya jika diberikan warna $c'(z_2y_n) = 1$ maka tidak terdapat *rainbow* $y_n - y_1$ *path* di $\mathfrak{B}_n$. Sementara jika $c'(z_1y_n) = 2$ maka tidak terdapat *rainbow* $y_n - y_2$ *path* di $\mathfrak{B}_n$. Jika $c'(z_1y_n) = 3$ maka tidak terdapat *rainbow* $y_n - y_3$ *path* di $\mathfrak{B}_n$.

Berdasarkan pewarnaan tersebut, jelas bahwa $rc(\mathfrak{B}_n) \neq 3$, sehingga haruslah $rc(\mathfrak{B}_n) \geq 4$. Maka diperoleh bahwa $rc(\mathfrak{B}_n) = 4$ untuk $n \geq 4$. □

Gambar 5 merupakan gambar pewarnaan *rainbow* pada graf $\mathfrak{B}_n$.
Pada Teorema 2.2 diberikan bilangan Rainbow Connection pada graf kipas.



Gambar 5. Rainbow coloring pada graf $\mathfrak{B}_n$

Teorema 2.2. [7] *Untuk* $n \geq 2$, rainbow connection number *dari graf kipas* F_n *adalah*

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & \textit{untuk } n = 2, \\ 2, & \textit{untuk } 3 \leq n \leq 6, \\ 3, & \textit{untuk } n \geq 7. \end{cases}$$

Bukti. Graf kipas F_n adalah graf dengan memiliki himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$V(F_n) = \{x_i, P; 1 \leq i \leq n\},$$
$$E(F_n) = \{x_i x_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1, Px_i; 1 \leq i \leq n\}.$$

Banyak titik pada graf F_n yaitu $|V(F_n)| = n+1$ dan banyak sisi pada graf F_n yaitu $|E(F_n)| = 2(n) - 1$. Pandang beberapa kasus berikut.

Kasus 1. $n = 2$.
Definisikan $c_5 : E(F_n) \to \{1\}$ sebagai berikut.

$$c_5(e) = 1, \ e = x_1x_2, e = Px_1, e = Px_2.$$

Berdasarkan pewarnaan tersebut, jelas bahwa $rc(F_2) \leq 1$. Selanjutnya karena $diam(F_2) = 1$ maka berdasarkan Proposisi 1.1, berlaku bahwa $rc(F_2) \geq 1$. Dapat disimpulkan bahwa $rc(F_2) = 1$.
Kasus 2. $3 \leq n \leq 6$.
Definisikan $c_6 : E(F_n) \to \{1, 2\}$ sebagai berikut.

$$c_6(e) = \begin{cases} 1, \, e = Px_i, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 3, \\ \quad e = x_i x_{i+1} \text{ untuk } i \text{ ganjil }, 1 \leq i \leq 3, \\ 2, \, e = Px_i \text{ untuk } 4 \leq i \leq 6, \\ \quad e = x_i x_{i+1} \text{ untuk } i \text{ genap } 1 \leq i \leq 3. \end{cases}$$

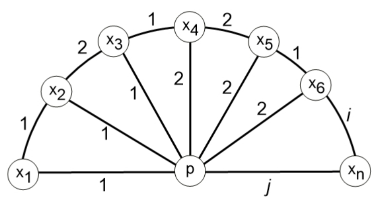
Berdasarkan pewarnaan tersebut, jelas bahwa $rc(F_n) \leq 2$ untuk $3 \leq n \leq 6$. Selanjutnya karena $diam(F_n) = 2$ maka berdasarkan Proposisi 1.1, berlaku bahwa $rc(F_n) \geq 2$. Dapat disimpulkan bahwa $rc(F_n) = 2$ untuk $3 \leq n \leq 6$.

Kasus 3. $n \geq 7$.
Definisikan $c_7 : E(F_n) \to \{1, 2, 3\}$ sebagai berikut.

$$c_7(e) = \begin{cases} 1, \ e = x_i x_{i+1} \text{ untuk } 1 \leq i \leq n, \\ 2, \ e = Px_i \text{ untuk } i \text{ ganjil }, 1 \leq i \leq n, \\ 3, \ e = Px_i \text{ untuk } i \text{ genap }, 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Berdasarkan pewarnaan tersebut, jelas bahwa $rc(F_n) \leq 3$ untuk $n \geq 7$. Selanjutnya, karena $diam(F_n) = 2$ maka berdasarkan Proposisi 1.1 diperoleh $rc(F_n) \geq 2$.

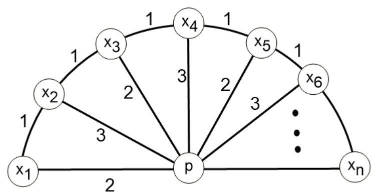
Akan ditunjukkan $rc(F_n) \neq 2$ sehingga $rc(F_n) \geq 3$. Misalkan c' adalah suatu *rainbow 2-coloring* dari F_n untuk $n \geq 7$. Warnai graf F_n, untuk $n \geq 7$ dengan pewarnaan graf F_n untuk $3 \leq n \leq 6$. Pewarnaan tersebut dapat dilihat pada Gambar 6. Dengan memberi warna $c'(Px_n) = 1$ maka tidak terdapat *rainbow path*



Gambar 6. $rc(F_n) = 2$ dengan $i \in \{1, 2\}$

pada lintasan yang menghubungkan x_1 ke x_n pada F_n. Jika $c'(Px_n) = 2$ maka tidak terdapat *rainbow path* pada lintasan yang menghubungkan x_1 ke x_4 pada F_n. Ini membuktikan bahwa $rc(F_n) \neq 2$ sehingga haruslah $rc(F_n) \geq 3$. Dengan demikian dapat dibuktikan bahwa $rc(F_n) = 3$. $\square$

Gambar 7 merupakan gambar pewarnaan *rainbow* pada graf F_n.



Gambar 7. F_n dengan $rc(F_n) = 3$

Pada Teorema 2.3 diberikan *rainbow connection number* untuk graf tribun.

Teorema 2.3. [5] *Nilai* rainbow connection number *untuk graf* $\mathfrak{T}_n = shack(Tribun, n)$ *adalah* $rc(\mathfrak{T}_n) = 2n$.

Bukti. Graf $\mathfrak{T}_n = shack(tribun, n)$ adalah hasil graf *shackle* (belenggu) sebuah graf tribun sebanyak n kali, dengan himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
V(\mathfrak{T}_n) &= \{x_i, z_i, y_j; 1 \leq i \leq 2n; 1 \leq j \leq n+1\},\\
E(\mathfrak{T}_n) &= \{x_i z_i; i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{y_j x_{2j-1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{z_i y_{j+1}; i \text{ genap}, 1 \leq i \leq 2n; 1 \leq j \leq n\}\\
&\quad \cup \{y_j z_{2j-1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{z_i z_{i+1}; i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{y_j x_{2j}; 1 \leq j \leq n\}\\
&\quad \cup \{x_i z_i; i \text{ genap}, 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{z_i y_{j+1}; i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq n\}\\
&\quad \cup \{z_i x_{i-1}; i \text{ genap}, 1 \leq i \leq 2n\}
\end{aligned}
$$

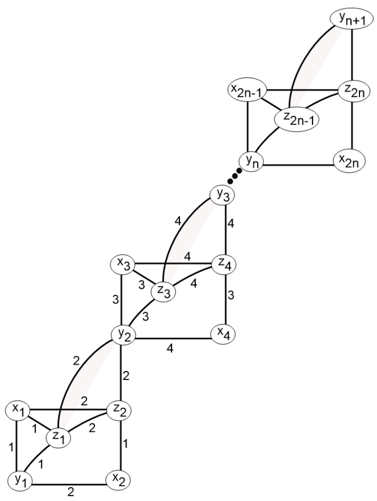
Dapat dilihat bahwa $|V(\mathfrak{T}_n)| = 5n + 1$ dan $|E(\mathfrak{T}_n)| = 9n$.

Definisikan $c_8 : E(F_n) \rightarrow \{1, 2, \cdots, 2n\}$ sebagai berikut.

$$
c_8(e) = \begin{cases}
i-1, & e = x_i z_i \text{ untuk } i \text{ genap}, 1 \leq i \leq 2n,\\
2j-1, & e = y_j x_{2j-1} \text{ untuk } y_j z_{2j-1}, \text{ untuk } 1 \leq j \leq n,\\
i, & e = x_i z_i \text{ untuk } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 2n,\\
 & e = z_i x_{i-1} \text{ untuk } i \text{ genap}, 1 \leq i \leq 2n,\\
 & e = z_i y_{j+1} \text{ untuk } i \text{ genap}, 1 \leq i \leq 2n; 1 \leq j \leq n,\\
2j, & e = y_j x_{2j} \text{ untuk } 1 \leq j \leq n,\\
i+1, & e = z_i z_{i+1} \text{ untuk } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 2n,\\
 & e = z_i y_{j+1} \text{ untuk } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 2n; 1 \leq j \leq n.
\end{cases}
$$

Berdasarkan definisi pewarnaan pada graf $\mathfrak{T}_n$, diperoleh bahwa $rc(\mathfrak{T}_n) \leq 2n$. Selanjutnya, karena $diam(\mathfrak{T}_n) = 2n$, maka berdasarkan Proposisi 1.1, $rc(\mathfrak{T}_n) \geq 2n$. Sehingga dapat dibuktikan bahwa $rc(\mathfrak{T}_n) = 2n$. □

Gambar 8 merupakan pewarnaan *rainbow* pada graf $\mathfrak{T}_n = shack(tribun, n)$.



Gambar 8. Graf $\mathfrak{T}_n$ dengan $rc(\mathfrak{T}_n) = 2n$

3. Kesimpulan

Pada makalah ini telah dikaji kembali makalah [5] tentang penentuan *rainbow connection number* pada graf buku segiempat $\mathfrak{B}_n$, graf kipas F_n dan graf Tribun $\mathfrak{T}_n$ sebagai berikut.

(1) *Rainbow connection number* untuk graf buku segiempat $\mathfrak{B}_n$ adalah

$$rc(\mathfrak{B}_n) = \begin{cases} 2, & \text{untuk } n = 1, \\ 3, & \text{untuk } n = 2 \text{ dan } n = 3, \\ 4, & \text{untuk } n \geq 4. \end{cases}$$

(2) *Rainbow connection number* untuk graf kipas F_n adalah

$$rc(F_n) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } n = 2, \\ 2, & \text{untuk } 3 \leq n \leq 6, \\ 3, & \text{untuk } n \geq 7. \end{cases}$$

(3) *Rainbow connection number* untuk graf tribun $\mathfrak{T}_n$ adalah

$$rc(\mathfrak{T}_n) = 2n.$$

4. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy, Bapak Dr. Effendi, Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Narwen, M.Si, Bapak Budi Rudianto, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J. A. dan U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications.* Macmillan, London.
[2] Chartrand, G. dkk. 2008. Rainbow Connection in Graph, *Mathematica Bohemica.* **133**: 85 – 98
[3] Darmawan, R. N. 2015. Analisis Rainbow Connection Number pada Graf Khusus dan Hasil Operasinya. *Tesis S-2*, tidak dipublikasikan. Universitas Jember, Jember.
[4] Li, X. dan Sun, Y. 2012. *Rainbow Connection of Graphs.* Springer, New York.
[5] Mahmudah, M. dan Dafik. Rainbow Connection hasil operasi graf. *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014 Universitas Jember* hal. 174 – 183
[6] Mahmudah, M. Dafik dan Slamin. Super (a, d)-Edge Antimagic Total Labeling Of Connected Tribun Graph. *Kadikma.* **6**(3) : 115 – 122
[7] Medika, G.H. Syafrizal Sy. Yulianti, Lyra. The Rainbow Connection of Fan and Sun. *Applied Mathematical Sciences.* **7**(64): 3155 – 3159
[8] N. L. Biggs, R. J. Lloyd dan R. J. Wilson. 1986. *Graph Theory 1736-1936.* Clarendon Press, Oxford.