Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **1** Hal. 177 – 185
ISSN : 2303–291X

EKSISTENSI DAN KONSTRUKSI GENERALISASI $\{1\}$-INVERS DAN $\{1, 2\}$-INVERS

ZAHY IDIL FITRI, YANITA, NOVA NOLIZA BAKAR
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : zahyidilfitri@gmail.com

Abstrak. Generalisasi invers merupakan perluasan dari konsep invers matriks. Untuk setiap matriks A berukuran $m \times n$ dari elemen real atau kompleks, terdapat matriks tunggal X sehingga memenuhi empat persamaan yang dikenal dengan persamaan Penrose. Generalisasi invers yang memenuhi keempat persamaan Penrose disebut invers Moore-Penrose, sedangkan yang hanya memenuhi beberapa persamaan Penrose tetap disebut sebagai generalisasi invers. Tugas akhir ini membahas tentang generalisasi $\{1\}$-invers dan $\{1, 2\}$-invers. Untuk menentukan $\{1\}$-invers dan $\{1, 2\}$-invers dari suatu matriks, maka matriks tersebut harus diubah kedalam bentuk normal Hermite terlebih dahulu.

Kata Kunci: Matriks, generalisasi invers, persamaan Penrose, matriks normal Hermite.

1. Pendahuluan

Matriks adalah kumpulan bilangan, simbol, atau ekspresi, berbentuk persegi panjang yang disusun menurut baris dan kolom. Bilangan-bilangan yang terdapat di suatu matriks disebut dengan entri atau anggota matriks. Matriks sama halnya dengan variabel biasa, dapat dikalikan, dijumlah, dikurangkan, dan didekomposisikan. Dengan representasi matriks, perhitungan dapat dilakukan dengan lebih terstruktur.

Pada tahun 1920 E.H Moore mendeskripsikan salah satu jenis invers matriks yang dikenal dengan nama generalisasi invers. Generalisasi invers merupakan perluasan dari konsep invers matriks, dimana invers matriks tidak lagi hanya untuk matriks yang nonsingular. Kemudian pada tahun 1955 Roger Penrose berhasil mendeskripsikan empat persamaan yang harus dipenuhi untuk menentukan generalisasi invers [2]. Persamaan tersebut dikenal sebagai persamaan Penrose, dan generalisasi invers yang memenuhi keempat persamaan Penrose dikenal dengan nama Invers Moore-Penrose. Sedangkan generalisasi invers yang hanya memenuhi beberapa persamaan Penrose tetap dinamakan sebagai generalisasi invers.

Persamaan invers Moore-Penrose adalah sebagai berikut.

$$AXA = A, \tag{1.1}$$

$$XAX = X, \tag{1.2}$$

$$(AX)^* = AX, \tag{1.3}$$

$$(XA)^* = XA. \tag{1.4}$$

Untuk memudahkan penyebutan, maka generalisasi invers dibagi ke dalam kelas-kelas tertentu. Pembagian kelas-kelas ini didasarkan kepada banyaknya persamaan Penrose yang dapat dipenuhi berdasarkan persamaan (1.1) – persamaan (1.4), yaitu $\{1\}$-invers, $\{1,2\}$-invers, $\{1,2,3\}$-invers, $\{1,2,4\}$-invers dan $\{1,2,3,4\}$-invers.

2. Persamaan Penrose

Pada tahun 1955, Penrose [2] menunjukkan bahwa untuk setiap matriks hingga A (persegi atau persegi panjang) dari elemen real atau kompleks, terdapat matriks tunggal X sehingga memenuhi empat persamaan yang dikenal sebagai Persamaan Penrose. Persamaan inilah yang menjadi dasar adanya gene-ralisasi invers suatu matriks. Empat persamaan Penrose tersebut adalah:

$$AXA = A \tag{2.1}$$

$$XAX = X \tag{2.2}$$

$$(AX)^* = AX \tag{2.3}$$

$$(XA)^* = XA \tag{2.4}$$

dimana $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$, $X \in \mathbb{C}_{n\times m}$, dan A^* adalah transpos konjugat dari A. Matriks X yang memenuhi persamaan (2.1), (2.2), (2.3), dan (2.4) disimbolkan dengan $X = A^\dagger$.

Generalisasi invers yang memenuhi keempat persamaan Penrose disebut Invers Moore-Penrose, sedangkan yang hanya memenuhi beberapa persamaan Penrose tetap disebut sebagai generalisasi invers.

Teorema 2.1. [2] *Jika $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ matriks nonsingular, maka $A^\dagger = A^{-1}$.*

Definisi 2.2. [2] *Misalkan $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dan $X \in \mathbb{C}_{n\times m}$*

(1) Matriks X disebut $\{1\}$-invers dari matriks A jika memenuhi persamaan (2.1) *dan selanjutnya dinotasikan dengan $X \in A\{1\}$ atau $A^{(1)}$.*
(2) Matriks X disebut $\{1,2\}$-invers dari matriks A jika memenuhi persamaan (2.1) *dan* (2.2) *yang selanjutnya dinotasikan dengan $X \in A\{1,2\}$ atau $A^{(1,2)}$.*
(3) Matriks X disebut $\{1,2,3\}$-invers dari matriks A jika memenuhi persamaan (2.1), (2.2) *dan* (2.3) *yang selanjutnya dinotasikan dengan $X \in A\{1,2,3\}$ atau $A^{(1,2,3)}$.*
(4) Matriks X disebut $\{1,2,4\}$-invers dari matriks A jika memenuhi persamaan (2.1),(2.2) *dan* (2.4) *yang selanjutnya dinotasikan dengan $X \in A\{1,2,4\}$ atau $A^{(1,2,4)}$.*
(5) Matriks X disebut $\{1,2,3,4\}$-invers dari matriks A jika memenuhi persamaan (2.1),(2.2), (2.3) *dan* (2.4) *yang selanjutnya dinotasikan dengan $X \in A\{1,2,3,4\}$ atau $A^{(1,2,3,4)}$.*

Teorema 2.3. [2] *Jika $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dan $A\{1,2,3,4\}$ tidak kosong, maka invers Moore-Penrose untuk A adalah tunggal.*

Contoh 2.4. Bentuk normal Hermite dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

adalah

$$EAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

3. Eksistensi dan Konstruksi dari {1}-invers

Teorema 3.1. [2] *Misalkan*

$$R = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

merupakan matriks partisi yang berukuran $m \times n$ dengan $rk(R) = r$ dimana $K \in \mathbb{C}_{r\times(n-r)}$, maka $\{1\}$-invers dari $R \in \mathbb{C}_{m\times n}$ adalah

$$S = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

yang berukuran $n \times m$ dengan $L \in \mathbb{C}_{(n-r)\times(m-r)}$.

Bukti. Diambil sebarang $S \in \mathbb{C}_{n\times m}$ dimana S yang diberikan oleh (3.2) dengan $L \in \mathbb{C}_{(n-r)\times(m-r)}$, dan matriks $R \in \mathbb{C}_{m\times n}$ yang diberikan oleh (3.1) dengan $K \in \mathbb{C}_{r\times(n-r)}$.

Akan dibuktikan bahwa matriks S merupakan $\{1\}$-invers dari R, dengan kata lain memenuhi persamaan (2.1).

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} RSR &= \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \\ &= R. \end{aligned}$$

□

Teorema 3.2. [2] *Misalkan $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan $rk(A) = r$, $E \in \mathbb{C}_{m\times m}$ dan $P \in \mathbb{C}_{n\times n}$ merupakan matriks nonsingular sedemikian sehingga*

$$EAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

dimana $K \in \mathbb{C}_{r\times(n-r)}$, maka $\{1\}$-invers dari A dapat dibentuk dari matriks partisi berikut ini

$$A^{(1)} = P \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} E$$

dengan $L \in \mathbb{C}_{(n-r)\times(m-r)}$

Bukti. Misalkan $P \in \mathbb{C}_{n\times n}$ dan $E \in \mathbb{C}_{m\times m}$ keduanya merupakan matriks nonsingular, maka terdapat $P^{-1} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ sedemikian sehingga $P^{-1}P = PP^{-1} = I_n$ dan $E^{-1} \in \mathbb{C}_{m\times m}$ sedemikian sehingga $E^{-1}E = EE^{-1} = I_m$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
EAP &= \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \\
E^{-1}EAPP^{-1} &= E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\
(E^{-1}E)A(PP^{-1}) &= E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\
A &= E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1}
\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan $A^{(1)}$ merupakan $\{1\}$-invers dari A, dengan kata lain memenuhi (2.1). Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
AA^{(1)}A = E^{-1}&\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} E \\
E^{-1}&\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\
= E^{-1}&\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\
= A&
\end{aligned}$$

$\square$

Contoh 3.3. Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{bmatrix}$$

yang berukuran 3×6. Akan ditentukan $\{1\}$-invers dari A. Untuk mendapatkan $\{1\}$-invers dari A, pertama matriks A disederhanakan ke dalam bentuk normal Hermite. Diperoleh bentuk normal Hermite dari A, yakni

$$EAP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{2} & 1-2i & -\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 2 & 1+i \\ -- & -- & -- & -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

dimana

$$E = E_4E_3E_2E_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}.$$

dan

$$P = \begin{bmatrix} 0\,0 \mid 1\,0\,0\,0 \\ 1\,0 \mid 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0 \mid 0\,1\,0\,0 \\ 0\,1 \mid 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0 \mid 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0 \mid 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Dengan mengambil

$$L = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \in \mathbb{C}_{4\times 1},$$

maka $\{1\}$-invers dari A adalah

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix} E \\ &= \begin{bmatrix} 0\,0 \mid 1\,0\,0\,0 \\ 1\,0 \mid 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0 \mid 0\,1\,0\,0 \\ 0\,1 \mid 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0 \mid 0\,0\,1\,0 \\ 0\,0 \mid 0\,0\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid & 0 \\ 0 & 1 & \mid & 0 \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & \mid & \alpha \\ 0 & 0 & \mid & \beta \\ 0 & 0 & \mid & \gamma \\ 0 & 0 & \mid & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} i\alpha & \frac{1}{3}\alpha & \alpha \\ -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ i\beta & \frac{1}{3}\beta & \beta \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i\gamma & \frac{1}{3}\gamma & \gamma \\ i\delta & \frac{1}{3}\delta & \delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Perlu dicatat bahwa, secara umum, skalar $i\alpha, i\beta, i\gamma, i\delta$ bukan imajiner murni, karena $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ adalah kompleks.

Lema 3.4. *Misalkan $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan $rk(A) = r, \lambda \in \mathbb{C}$, dan $\lambda^{\dagger}$ didefinisikan sebagai*

$$\lambda^{\dagger} = \begin{cases} \lambda^{-1} \ (\lambda \neq 0) \\ \ 0 \quad (\lambda = 0) \end{cases}$$

maka

(a) $(A^{(1)})^{*} \in A^{*}\{1\}$
(b) Jika A nonsingular, maka $A^{(1)} = A^{-1}$ tunggal

(c) $\lambda^\dagger A^{(1)} \in (\lambda A)\{1\}$
(d) $rk(A^{(1)}) \geq rk(A)$
(e) Jika S *dan* T *adalah nonsingular, maka* $T^{-1}A^{(1)}S^{-1} \in SAT\{1\}$
(f) Jika $AA^{(1)}$ *dan* $A^{(1)}A$ *adalah idempoten dan matriks nonsingular, maka* $AA^{(1)}$ *dan* $A^{(1)}A$ *mempunyai rank yang sama seperti* A*.*

4. Eksistensi dan Konstruksi dari $\{1,2\}$-invers

Lema 4.1. [2] *Jika* $Y, Z \in A\{1\}$ *dan* $X = YAZ$*, maka* $X \in A\{1,2\}$*.*

Bukti. Misalkan $Y, Z \in A\{1\}$ dan $X = YAZ$, akan dibuktikan $X \in A\{1,2\}$. Matriks $Y, Z \in A\{1\}$, berarti memenuhi $AYA = A$ dan $AZA = A$. Diketahui $X = YAZ$, maka akan ditunjukkan bahwa X memenuhi persamaan (2.1) dan (2.2), yaitu

(1) $AXA = A(YAZ)A = (AYA)ZA = AZA = A$
(2) $XAX = (YAZ)A(YAZ) = Y(AZA)YAZ = YAYAZ = Y(AYA)Z = YAZ = X$ $\square$

Teorema 4.2. [2] *Misalkan matriks* $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $rk(A) = r$ *dan* $X \in A\{1\}$*. Maka* $X \in A\{1,2\}$ *jika dan hanya jika* $rk(X) = rk(A)$*.*

Teorema 4.3. [2] *Misalkan matriks* $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ *dengan* $rk(A) = r$*, dan* $X \in A\{1,2\}$ *dengan* $rk(X) = rk(A)$*, maka*

$$X = P \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} E \tag{4.1}$$

dimana $E \in \mathbb{C}_{m\times m}$ *dan* $P \in \mathbb{C}_{n\times n}$ *merupakan matriks nonsingular.*

Bukti. Misalkan $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan $rk(A) = r$, dan $X \in A\{1,2\}$ dengan $rk(X) = rk(A)$. Akan ditunjukkan bahwa

$$X = P \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)} \end{bmatrix} E.$$

Oleh karena $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dan $rk(A) = r$, maka A dapat ditulis sebagai

$$A = E^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Selanjutnya $rk(A) = rk(X) = r$, maka untuk $X \in A\{1\}$ berlaku

$$X = P \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} E.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa X pada persamaan (4.1) memenuhi persamaan (2.1) dan (2.2). Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} AXA &= E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1}P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} E \\ & E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= E^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} XAX &= P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} EE^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\ & P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} E \\ &= P\begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} E \\ &= X \end{aligned}$$

□

Contoh 4.4. Diberikan matriks

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2i & i & 0 & 4+2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 & -3-3i \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4-4i & 1 \end{bmatrix}$$

Akan ditentukan $\{1,2\}$- invers dari A.

Dengan memilih $L = O$, maka diperoleh $\{1,2\}$- invers dari A

$$\begin{aligned} X &= P\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix} E \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 \\ -- & -- & -- & -- \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ i & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 2004. *Aljabar Linear Elementer*(terjemahan); edisi ke 8 . Erlangga, Jakarta
[2] Ben-Israel, A and Greville, Thomas N.E. 2003. *Generalized Inverses Theory And Aplication*; Second Edition . Springer-Verlag New York, Inc, USA
[3] H.S, D.Suryadi dan S.Harini M. 1990. *Teori dan Soal Pendahuluan Aljabar Linier* . Ghalia Indonesia, Jakarta
[4] Hadley, G. 1983. *Linear Algebra* (terjemahan) . Erlangga, Jakarta
[5] Leon, S.J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya*(terjemahan); edisi ke 5 . Erlangga, Jakarta
[6] Piziak, R and Odell, P.L. 2007. *Matrix Theory From Generalized Inverses to Jordan Form* . Taylor and Francis Group, Canada
[7] Supranto, J. 1998. *Pengantar Matrix* . PT RINEKA CIPTA, Jakarta