PENENTUAN BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF THORN DARI GRAF RODA W_3

ELVA RAHIMAH, LYRA YULIANTI, DES WELYANTI

*Jurusan Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : elva.rahimah@gmail.com*

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ graf terhubung. Bilangan kromatik dari graf G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan- k titik sejati. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan $\chi(G) = k$, ini berarti titik-titik di G paling kurang diwarnai dengan k warna dan tidak dapat diwarnai dengan $k - 1$ warna, sementara jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama.

Kelas warna pada G dinotasikan dengan S_i , merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$. Berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π disebut *kode warna* dari v , dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k -vektor

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π , maka c disebut **pewarnaan lokasi** dari G . Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut **bilangan kromatik lokasi**. Pada tulisan ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi graf thorn dari graf roda W_3 .

Kata Kunci: Kelas warna, kode warna, bilangan kromatik lokasi, graf thorn, graf roda

1. Pendahuluan

Pewarnaan graf diyakini pertama kali muncul sebagai masalah pewarnaan peta, dimana warna setiap daerah pada peta yang berbatasan dibuat berlainan sehingga mudah untuk dibedakan. Masalah pewarnaan graf juga memiliki banyak aplikasi di dalam bidang lain. Salah satunya adalah pembuatan suatu jadwal, yang bertujuan agar waktu dan tempat yang sudah diatur sedemikian mungkin tidak saling tumpang tindih.

Konsep pewarnaan lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. [1] pada tahun 2002 dengan menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa graf sebagai berikut, untuk graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\chi_L(P_n) = 3$. Untuk graf siklus diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil atau $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Selanjutnya, juga diperoleh bilangan kromatik lokasi untuk graf multipartit lengkap dan graf bintang ganda.

Pada tahun 2003, Chartrand dkk. [3] mengkarakterisasi graf orde n dengan bilangan kromatik lokasi $n - 1$. Karena masih sedikit bilangan kromatik lokasi yang

diketahui, maka topik pewarnaan lokasi menarik untuk dikaji lebih lanjut. Untuk itu pada tulisan ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi untuk graf thorn dari graf roda, dinotasikan graf $Th(W_n, \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$, yaitu $\chi_L(Th(W_n, \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n))$.

2. Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Graf Roda (*Wheel*) dilambangkan dengan W_n dengan $n \geq 3$, adalah graf yang dikonstruksi dari suatu graf lingkaran C_n , dengan banyak titik $n \geq 3$, dengan cara menambahkan satu titik yang bertetangga dengan setiap titik pada graf lingkaran. Dinotasikan

$$V(W_n) = \{v_i \mid 0 \leq i \leq n\},$$

$$E(W_n) = \{v_0v_j \mid 1 \leq j \leq n\} \cup \{v_kv_{k+1} \mid 1 \leq k \leq n-1\} \cup \{v_1v_n\}.$$

Gambar 1. Contoh Graf Roda W_4

Graf *thorn* dari graf roda, dinotasikan $Th(W_n, \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$, adalah graf yang dikonstruksi dari graf roda W_n dengan cara sebagai berikut. Pada setiap titik v_i untuk $0 \leq i \leq n$ di W_n ditambahkan daun sebanyak ℓ_i untuk $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ dengan $\ell_i \geq 1$. Notasikan $m = \ell_{\max} = \max\{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n\}$ yang merupakan banyak daun maksimum. Selanjutnya, notasikan v_{ij} sebagai titik ke- j yang bertetangga dengan v_i pada graf W_n , untuk $0 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq \ell_i$.

Dapat dilihat bahwa himpunan titik dan himpunan sisi dari graf $Th(W_n, \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)$ adalah:

$$V(Th(W_n, \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)) = \{v_i \mid 0 \leq i \leq n\} \cup \{v_{ij} \mid 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \ell_i\},$$

$$E(Th(W_n, \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_n)) = E(W_n) \cup \{v_iv_{ij} \mid 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \ell_i\}.$$

Graf thorn untuk graf roda diperlihatkan pada Gambar 2.

3. Bilangan Kromatik Lokasi

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan- k titik sejati. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan $\chi(G) = k$, ini berarti titik-titik di G paling kurang diwarnai dengan k warna dan tidak dapat diwarnai dengan $k-1$ warna. Jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama.

 Gambar 2. Graf $Th(W_n, \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_9)$

Kelas warna pada G dinotasikan dengan S_i , merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$. Berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π disebut **kode warna** dari v , dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k -vektor,

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π , maka c disebut **pewarnaan lokasi** (*locating-coloring*) dari G . Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut **bilangan kromatik lokasi** (*locating-chromatic number*).

Chartrand dkk. (2002) telah memberikan teorema dasar terkait bilangan kromatik lokasi suatu graf. Teorema tersebut dijelaskan pada teorema-teorema di bawah ini. Definisikan $N(v)$ sebagai himpunan yang berisi semua titik yang menjadi tetangga dari v .

Teorema 3.1. [2] Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v adalah dua titik pada graf G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Misalkan $\Pi = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ adalah partisi dari himpunan titik-titik di G dengan S_i menyatakan kelas warna untuk $1 \leq i \leq k$. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama. Akibatnya, $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$ maka $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Dengan demikian, haruslah

$$c(u) \neq c(v).$$

□

Akibat 3.2. [2] Jika G adalah suatu graf terhubung yang memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun di G , maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti. Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G . Dari Teorema 3.1 setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna berbeda untuk setiap x_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i , maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i . Akibatnya diperoleh bahwa, $\chi_L(G) \geq k + 1$. □

Pada Teorema 3.3 diberikan bilangan kromatik lokasi dari graf roda W_n untuk $n \geq 3$.

Teorema 3.3. [4] Untuk $n \geq 3$, misalkan $W_n = K_1 + C_n$ dan $r = \min\{k \in N \mid n \neq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$. Maka,

$$\chi_L(W_n) = \begin{cases} 1 + \chi_L(C_n), & 3 \leq n < 9, \\ r + 1, & n \neq \frac{1}{2}(r^3 - r^2) - 1 \text{ dan } n \geq 9, \\ r + 2, & n = \frac{1}{2}(r^3 - r^2) - 1 \text{ dan } n \geq 9. \end{cases} \quad (3.1)$$

4. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Thorn untuk Graf Roda

Misalkan terdapat graf $G \simeq Th(W_3, \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_3)$. Pada Teorema 4.1 diberikan bilangan kromatik lokasi dari G .

Teorema 4.1. ◇ Misalkan terdapat graf $G \simeq Th(W_3, \ell_0, \ell_1, \dots, \ell_3)$. Maka

$$\chi_L(G) = \begin{cases} 4, & m \leq 3, \\ m + 1, & m > 3. \end{cases} \quad (4.1)$$

Bukti. Algoritma penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf G adalah sebagai berikut:

- (1) Berikan $c(v_0) = 1$,
- (2) Berikan warna pada titik v_i , sebagai berikut:

$$c(v_i) = i + 1 \text{ untuk } 1 \leq i \leq 3,$$

- (3) Berikan warna pada titik daun v_{ij} dengan $i \in [1, 3]$, $j \in [1, m]$ yang terkait pada setiap titik di W_3 . Jika terdapat titik v_i di W_3 dengan warna setiap titik di W_3 berbeda maka berikan warna v_{ij} yang sesuai. Karena v_i bertetangga dengan v_{ij} maka $c(v_i) \neq c(v_{ij})$. Tuliskan $m = \ell_{\max} = \max\{\ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3\}$
- (4) Karena $d(u, S_i) \neq d(v, S_i)$ untuk suatu $1 \leq i \leq k$ maka $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$ untuk setiap $u, v \in V(G)$.

Berdasarkan algoritma di atas akan ditentukan:

- (1) Akan ditunjukkan $\chi_L(G) = 4$ untuk $m \leq 3$.

 Gambar 3. Pewarnaan Lokasi dari Graf $Th(W_3, \ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ untuk $m \leq 3$

(a) Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) \leq 4$ untuk $m \leq 3$.

Definisikan pewarnaan titik di G sebagai berikut $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} c(v_0) &= 1, \\ c(v_s) &= a + 1 \text{ untuk } 1 \leq a \leq 3, \\ c(v_{ij}) &= [1, 4] \setminus \{c(v_i)\} \text{ untuk } 0 \leq i \leq 3, \text{ dan } 1 \leq j \leq 3. \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan bahwa kode warna setiap titik di G berbeda terhadap Π . Berdasarkan pewarnaan c di atas, diperoleh bahwa $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_4\}$ dengan

$$S_1 = \{v_0, v_{11}, v_{21}, v_{31}\}, S_2 = \{v_1, v_{01}, v_{22}, v_{32}\}, S_3 = \{v_2, v_{02}, v_{12}, v_{33}\}, S_4 = \{v_3, v_{03}, v_{13}, v_{23}\}.$$

Kode warna setiap titik di G terhadap Π sebagai berikut,

$$\begin{aligned} c_\Pi(v_0) &= (d(v_0, S_1), d(v_0, S_2), d(v_0, S_3), d(v_0, S_4)), \\ &= (d(v_0, v_0), d(v_0, v_1), d(v_0, v_2), d(v_0, v_3)), \\ &= (0, 1, 1, 1), \\ c_\Pi(v_1) &= (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4)), \\ &= (d(v_1, v_0), d(v_1, v_1), d(v_1, v_2), d(v_1, v_3)), \\ &= (1, 0, 1, 1), \\ c_\Pi(v_2) &= (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4)), \\ &= (d(v_2, v_0), d(v_2, v_1), d(v_2, v_2), d(v_2, v_3)), \\ &= (1, 1, 0, 1), \\ c_\Pi(v_3) &= (d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3), d(v_3, S_4)), \\ &= (d(v_3, v_0), d(v_3, v_1), d(v_3, v_2), d(v_3, v_3)), \\ &= (1, 1, 1, 0), \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh juga

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(v_{01}) &= (1, 0, 2, 2), c_{\Pi}(v_{12}) = (2, 1, 0, 2), c_{\Pi}(v_{23}) = (2, 2, 1, 0), \\ c_{\Pi}(v_{02}) &= (1, 2, 0, 2), c_{\Pi}(v_{13}) = (2, 1, 2, 0), c_{\Pi}(v_{31}) = (0, 2, 2, 1), \\ c_{\Pi}(v_{03}) &= (1, 2, 2, 0), c_{\Pi}(v_{21}) = (0, 2, 1, 2), c_{\Pi}(v_{32}) = (2, 0, 2, 1), \\ c_{\Pi}(v_{11}) &= (0, 1, 2, 2), c_{\Pi}(v_{22}) = (2, 0, 1, 2), c_{\Pi}(v_{33}) = (2, 2, 0, 1). \end{aligned}$$

Dari kode warna di atas dapat dilihat bahwa, setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda. Jadi, haruslah $\chi_L(G) \leq 4$ untuk $m \leq 3$.

(b) Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) \geq 4$ untuk $m \leq 3$.

Dari Teorema 3.3 diperoleh bahwa $\chi_L(W_3) = 4$. Karena $1 \leq m \leq 3$ maka bilangan kromatik lokasi graf thorn dari W_3 mengikuti bilangan kromatik lokasi graf W_3 . Jadi, haruslah $\chi_L(G) \geq 4$ untuk $m \leq 3$. Maka dapat disimpulkan bahwa $\chi_L(G) = 4$ untuk $m \leq 3$.

(2) Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) = m + 1$ untuk $m > 3$.

Gambar 4. Pewarnaan Lokasi dari Graf $Th(W_3, \ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)$ untuk $m > 3$.

(a) Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) \leq m + 1$ untuk $m > 3$.

Definisikan pewarnaan titik di G sebagai berikut $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, m + 1\}$ sedemikian hingga,

$$\begin{aligned} c(v_0) &= 1, \\ c(v_a) &= a + 1 \text{ untuk } 1 \leq a \leq 3, \\ c(v_{ij}) &= [1, m + 1] \setminus \{c(v_i)\} \text{ untuk } 0 \leq i \leq 3 \text{ dan } 1 \leq j \leq \ell_i. \end{aligned}$$

Maka diperoleh kelas warna sebagai berikut $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{m+1}\}$ dengan,

$$\begin{aligned} S_1 &= \{v_0, v_{11}, v_{21}, v_{31}\}, S_2 = \{v_1, v_{01}, v_{22}, v_{32}\}, S_3 = \{v_2, v_{02}, v_{12}, v_{33}\} \\ S_4 &= \{v_3, v_{03}, v_{13}, v_{23}\}, S_5 = \{v_{04}, v_{14}, v_{24}, v_{34}\}, \dots, S_{m+1} = \{v_{0m}, v_{1m}, v_{2m}, v_{3m}\} \end{aligned}$$

Akibatnya diperoleh kode warna setiap titik di G terhadap Π sebagai berikut,

$$\begin{aligned}
 c_{\Pi}(v_0) &= (d(v_0, S_1), d(v_0, S_2), d(v_0, S_3), d(v_0, S_4), d(v_0, S_5), \dots, d(v_0, S_{m+1})), \\
 &= (d(v_0, v_0), d(v_0, v_1), d(v_0, v_2), d(v_0, v_3), d(v_0, S_5), \dots, d(v_0, S_{m+1})), \\
 &= (0, 1, 1, 1, d(v_0, S_5), \dots, d(v_0, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_1) &= (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4), d(v_1, S_5), \dots, d(v_1, S_{m+1})), \\
 &= (d(v_1, v_0), d(v_1, v_1), d(v_1, v_2), d(v_1, v_3), d(v_1, S_5), \dots, d(v_1, S_{m+1})), \\
 &= (1, 0, 1, 1, d(v_1, S_5), \dots, d(v_1, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_2) &= (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4), d(v_2, S_5), \dots, d(v_2, S_{m+1})), \\
 &= (d(v_2, v_0), d(v_2, v_1), d(v_2, v_2), d(v_2, v_3), d(v_2, S_5), \dots, d(v_2, S_{m+1})), \\
 &= (1, 1, 0, 1, d(v_2, S_5), \dots, d(v_2, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_3) &= (d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3), d(v_3, S_4), d(v_3, S_5), \dots, d(v_3, S_{m+1})), \\
 &= (d(v_3, v_0), d(v_3, v_1), d(v_3, v_2), d(v_3, v_3), d(v_3, S_5), \dots, d(v_3, S_{m+1})), \\
 &= (1, 1, 1, 0, d(v_3, S_5), \dots, d(v_3, S_{m+1})),
 \end{aligned}$$

Selanjutnya, diperoleh juga

$$\begin{aligned}
 c_{\Pi}(v_{01}) &= (1, 0, 2, 2, d(v_{01}, S_5), \dots, d(v_{01}, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_{02}) &= (1, 2, 0, 2, d(v_{02}, S_5), \dots, d(v_{02}, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_{03}) &= (1, 2, 2, 0, d(v_{03}, S_5), \dots, d(v_{03}, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_{04}) &= (1, 2, 2, 2, 0, \dots, d(v_{04}, S_{m+1})), \\
 &\vdots \\
 c_{\Pi}(v_{0m}) &= (1, 2, 2, 2, 2, \dots, 0), \\
 c_{\Pi}(v_{11}) &= (0, 1, 2, 2, d(v_{11}, S_5), \dots, d(v_{11}, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_{12}) &= (2, 1, 0, 2, d(v_{12}, S_5), \dots, d(v_{12}, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_{13}) &= (2, 1, 2, 0, d(v_{13}, S_5), \dots, d(v_{13}, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_{14}) &= (2, 1, 2, 2, 0, \dots, d(v_{14}, S_{m+1})), \\
 &\vdots \\
 c_{\Pi}(v_{1m}) &= (2, 1, 2, 2, 2, \dots, 0), \\
 c_{\Pi}(v_{21}) &= (0, 2, 1, 2, d(v_{21}, S_5), \dots, d(v_{21}, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_{22}) &= (2, 0, 1, 2, d(v_{22}, S_5), \dots, d(v_{22}, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_{23}) &= (2, 2, 1, 0, d(v_{23}, S_5), \dots, d(v_{23}, S_{m+1})), \\
 c_{\Pi}(v_{24}) &= (2, 2, 1, 2, 0, \dots, d(v_{24}, S_{m+1})), \\
 &\vdots \\
 c_{\Pi}(v_{2m}) &= (2, 2, 1, 2, 2, \dots, 0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{\Pi}(v_{31}) &= (0, 2, 2, 1, d(v_{31}, S_5), \dots, d(v_{31}, S_{m+1})), \\
c_{\Pi}(v_{32}) &= (2, 0, 2, 1, d(v_{32}, S_5), \dots, d(v_{32}, S_{m+1})), \\
c_{\Pi}(v_{33}) &= (2, 2, 0, 1, d(v_{33}, S_5), \dots, d(v_{33}, S_{m+1})), \\
c_{\Pi}(v_{34}) &= (2, 2, 2, 1, 0, \dots, d(v_{34}, S_{m+1})), \\
&\vdots \\
c_{\Pi}(v_{3m}) &= (2, 2, 2, 1, 2, \dots, 0).
\end{aligned}$$

Dari kode warna di atas dapat dilihat bahwa, setiap titik di G mempunyai kode warna berbeda terhadap Π . Jadi, haruslah $\chi_L(G) \leq m + 1$ untuk $m > 3$.

(b) Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) \geq m + 1$ untuk $m > 3$.

Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_{m+1}\}$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan terdapat sebanyak $m = \ell_{\max}$ daun dititik v_i untuk suatu i . Dengan menggunakan Akibat 3.2 diperoleh $\chi_L(G) \geq m + 1$ untuk $m > 3$. Maka dapat disimpulkan bahwa $\chi_L(G) = m + 1$ untuk $m > 3$. $\square$

5. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan di bagian sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa,

$$\chi_L(Th(W_3, \ell_0, \ell_1, \ell_2, \ell_3)) = \begin{cases} 4, & m \leq 3, \\ m + 1, & m > 3. \end{cases}$$

6. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada bapak Narwen M.Si, bapak Dr. Effendi, dan ibu Radhiatul Husna M.Si selaku dosen penguji, yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 1976, *Graph Theory with Application*, The Macmillan Press LTD, London
- [2] Chartrand, G., dkk., 2002, The Locating-Chromatic Number of a Graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.* 36: 89 – 101
- [3] Chartrand, G., dkk., 2003, Graph of Order n with Locating-Chromatic Number n-1, *Discrete Math.* 269: 65 – 79
- [4] Purwasih, I. A., dkk., 2013, The Locating Chromatic Number for a Subdivision of a Wheel on One Cycle Edge, *Int. J. Graphs Comb.*, pp: 372 – 376