Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **4** Hal. 9 – 18
ISSN : 2303–291X


# MENENTUKAN INVERS MOORE-PENROSE DENGAN METODE BEN NOBLE

ANNISA MAULA ZAKIYA, YANITA, NOVA NOLIZA BAKAR
*Jurusan Matematika,*
*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,*
*Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,*
*email: annisa.amaza@gmail.com*

**Abstak**. Tulisan ini membahas tentang metode penghitungan invers Moore-Penrose dari matriks $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ dengan $rank(A) > 0$. Metode yang digunakan adalah metode Ben-Noble. Teori yang diperlukan untuk penghitungan invers Moore-Penrose menggunakan metode Ben-Noble adalah faktorisasi *full rank* dan partisi matriks.

*Kata Kunci*: Invers Moore-Penrose, Faktorisasi Full Rank, Matriks Partisi

## 1. Pendahuluan

Konsep suatu matriks sangat berguna dalam menyelesaikan permasalahan ilmu matematika, salah satunya adalah penyelesaian menggunakan invers matriks. Invers matriks dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear. Misalkan suatu matriks $A$ berukuran $n \times n$ dengan determinan $A$ tidak nol ($\det(A) \neq 0$), maka $A$ dikatakan memiliki invers.

Pada tahun 1920, E. H Moore mendeskripsikan salah satu jenis invers matriks, yaitu generalisasi invers. Generalisasi invers suatu matriks $A$ dapat ditentukan jika $A$ berukuran $m \times n$ atau $\det(A) = 0$. Selanjutnya Roger Penrose menyempurnakan generalisasi invers yang dikemukakan oleh Moore, inilah yang disebut invers Moore-Penrose. Seiring berkembangnya ilmu matematika, maka untuk menentukan invers Moore-Penrose ini terdapat beberapa cara, diantaranya dengan menggunakan metode Zlobec dan MacDuffe. Terdapat juga metode lain, yaitu metode yang diberikan oleh Ben-Noble dengan menggunakan partisi matriks. Pada tulisan ini penulis akan membahas penghitungan invers moore-penrose dengan metode Ben-Noble.

## 2. Tinjauan Teori

### 2.1. *Matriks dan Operasi Matriks*

**Definisi 2.1.** [1] *Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan selisih A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang* *bersesuaian pada $B$. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.*

**Definisi 2.2.** [1] *Jika $A$ adalah matriks sebarang dan $c$ adalah skalar sebarang, maka hasilkali-nya $cA$ adalah matriks yang diperoleh dari perkalian setiap entri pada matriks $A$ dengan bilangan $c$. Matriks $cA$ disebut kelipatan skalar dari $A$.*

**Definisi 2.3.** [1] *Jika $A$ adalah matriks $m \times r$ dan $B$ adalah matriks $r \times n$ maka hasilkali $AB$ adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris $i$ dan kolom $j$ dari $AB$, pisahkan baris $i$ dari matriks $A$ dan kolom $j$ dari matriks $B$. Kalikan entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.*

**Definisi 2.4.** [1] *Jika $A$ adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari $A$ di-nyatakan dengan $A^T$, didefinisikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari $A$, sehingga kolom pertama dari $A^T$ adalah baris pertama dari $A$, kolom kedua dari $A^T$ adalah baris kedua dari $A$, dan seterusnya.*

Misal $A = (a_{ij})$ dengan entri-entri $\in \mathbb{C}$, maka $\bar{A}$ adalah matriks konjugat dari $A$ yang didefinisikan sebagai $\bar{A} = (\bar{a_{ij}})$ dengan $\bar{a_{ij}}$ adalah konjugat dari $a_{ij}$. Konjugat transpos suatu matriks dinotasikan dengan $A^*$, didefinisikan sebagai $A^* = \bar{A}^T$.

Terdapat beberapa sifat yang terkait dengan konjugat transpos dari suatu matriks, yaitu jika ukuran matriks $A$, $B$, $I$ dan $\mathbb{O}$ sedemikian rupa sehingga operasi berikut dapat dilakukan serta $k \in \mathbb{C}$, maka :

(1) $(A^*)^* = A$.
(2) $(A + B)^* = A^* + B^*$ dan $(A - B)^* = A^* - B^*$.
(3) $(kA)^* = \bar{k}A^*$.
(4) $(AB)^* = B^*A^*$.
(5) $(I_n)^* = I_n$.
(6) $\mathbb{O}^* = \mathbb{O}$.

Teorema berikut memuat sifat-sifat utama dari operasi transpos.

**Teorema 2.5.** [1] *Jika ukuran matriks $A$, $B$ sedemikian rupa sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan, maka :*

*(1)* $(A^T)^T = A$.
*(2)* $(A + B)^T = A^T + B^T$ *dan* $(A - B)^T = A^T - B^T$.
*(3)* $(kA)^T = kA^T$, *dengan $k$ adalah skalar sebarang.*
*(4)* $(AB)^T = B^T A^T$.

**Definisi 2.6.** [1] *Permutasi dari himpunan bilangan bulat atau integer $\{1, 2, \cdots, n\}$ adalah susunan integer-integer ini menurut suatu aturan tanpa adanya penghilangan atau pengulangan.*

**Definisi 2.7.** [7] *Misalkan $\sigma$ adalah permutasi. Didefinisikan matriks permutasi $P(\sigma) = [\delta_{i,\sigma(j)}]$ dimana $\delta_{i,\sigma(j)}$ bernilai 1 jika $i = \sigma(j)$, dan 0 jika $i \neq \sigma(j)$.*

### 2.2. *Matriks Partisi*

Sebuah matriks dapat dibagi atau dipartisi menjadi beberapa matriks yang lebih kecil dengan cara menyisipkan garis-garis horizontal dan vertikal di antara baris dan kolom yang diinginkan. Misalkan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ adalah matriks partisi dengan jumlah partisi baris dan partisi kolom yang sama, dan partisi yang bersesuaian mempunyai ukuran yang sama. Maka penjumlahan partisi matriks yang bersesuaian dari $A$ dan $B$ juga menjumlahkan elemen-elemen yang bersesuaian dari $A$ dan $B$, dan perkalian tiap partisi dari $A$ dengan skalar $k$ akan mengalikan tiap elemen dari $A$ dengan $k$.

**Contoh 2.8.** Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

Maka

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix},$$

$$kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} \\ kA_{21} & kA_{22} \end{bmatrix}.$$

Berikut adalah aturan transpos matriks yang dipartisi [5]. Misalkan matriks $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$. Maka $A^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \end{bmatrix}$.

### 2.3. *Invers Matriks*

**Definisi 2.9.** [1] *Jika $A$ adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks $B$ yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka $A$ disebut dapat dibalik (invertible) dan $B$ disebut sebagai invers (inverse) dari $A$. Jika matriks $B$ tidak dapat didefinisikan, maka $A$ dinyatakan sebagai matriks singular.*

**Teorema 2.10.** [1] *Jika $B$ dan $C$ keduanya adalah invers dari matriks $A$, maka*

$$B = C.$$

**Teorema 2.11.** [1] *Jika matriks $A$ dan $B$ adalah matrik yang dapat dibalik dengan ukuran yang sama, maka $AB$ dapat dibalik, dan*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

**Teorema 2.12.** [7] *Jika $A$ adalah matriks yang dapat dibalik, maka $A^T$ juga dapat dibalik dan*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Teorema berikut ini akan memberikan kriteria penting mengenai keterbalikan dalam konteks determinan.

**Teorema 2.13.** [1] *Suatu matriks bujur sangkar $A$ dapat dibalik, jika dan hanya jika $det(A) \neq 0$.*

**Definisi 2.14.** [7] *Misalkan $A$ adalah matrik berukuran $m \times n$. Matriks $B$ dengan ukuran $n \times m$ dikatakan invers kiri dari $A$ jika $BA = I_n$ dan matriks $C$ dengan ukuran $n \times m$ dikatakan invers kanan dari $A$ jika $AC = I_m$.*

### 2.4. *Rank Matriks*

**Definisi 2.15.** [1] *Misalkan $V$ adalah suatu himpunan takkosong dari objek-objek sebarang, dimana dua operasinya didefinisikan, yaitu penjumlahan dan perkalian dengan skalar (bilangan). Operasi penjumlahan dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap pasang objek $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ pada $V$ dengan suatu objek $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, yang disebut jumlah dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$. Operasi perkalian skalar, dapat diartikan sebagai suatu aturan yang mengasosiasikan setiap skalar $k$ dan setiap objek $\boldsymbol{u}$ pada $V$ dengan suatu objek $k\boldsymbol{u}$, yang disebut kelipatan skalar dari $\boldsymbol{u}$ oleh $k$. jika aksioma-aksioma berikut dipenuhi oleh semua objek pada $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ pada $V$ dan senua skalar $k$ dan $l$, maka $V$ disebut sebagai ruang vektor dan objek-objek pada $V$ disebut sebagai vektor.*

*(1)* *Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah objek-objek pada $V$, maka $u+v$ berada pada $V$.*
*(2)* $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$.
*(3)* $\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}$.
*(4)* *Di dalam $V$ terdapat suatu objek $\boldsymbol{0}$, yang disebut* ***vektor nol*** *untuk $V$, sedemikian rupa sehingga $\boldsymbol{0}+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}$ untuk semua $\boldsymbol{u}$ pada $V$.*
*(5)* *Untuk setiap $\boldsymbol{u}$ pada $V$, terdapat suatu objek $-\boldsymbol{u}$ pada $V$, yang disebut sebagai negatif dari $\boldsymbol{u}$, sedemikian rupa sehingga $\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=(-\boldsymbol{u})+\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}$.*
*(6)* *Jika $k$ adalah skalar sebarang dan $\boldsymbol{u}$ adalah objek sebarang pada $V$, maka $k\boldsymbol{u}$ berada pada $V$.*
*(7)* $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=k\boldsymbol{u}+k\boldsymbol{v}$.
*(8)* $(k+l)\boldsymbol{u}=k\boldsymbol{u}+l\boldsymbol{u}$.
*(9)* $k(l\boldsymbol{u})=(kl)(\boldsymbol{u})$.
*(10)* $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$.

**Definisi 2.16.** [1] *Suatu subhimpunan $W$ dari suatu vektor $V$ disebut sub-ruang dari $V$ jika $W$ itu sendiri merupakan suatu ruang vektor dibawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada $V$.*

**Definisi 2.17.** [1] *Suatu vektor $\boldsymbol{w}$ disebut kombinasi linear dari vektor-vektor $v_1$, $v_2$, $\cdots$, $v_r$ jika dapat dinyatakan dalam bentuk*

$$w = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r,$$

*di mana $k_1, k_2, \cdots, k_r$ adalah skalar.*

**Definisi 2.18.** [1] *Jika $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor pada suatu ruang vektor $V$, maka subruang $W$ dari $V$ yang terdiri dari semua kombinasi linear vektor-vektor pada $S$ disebut sebagai ruang yang direntang oleh*

$v_1, v_2, \cdots, v_r$ *dan vektor-vektor* $v_1, v_2, \cdots, v_r$ *merentang* $W$*. Dapat ditulis sebagai* $W = rentang(S)$ *atau* $W = rentang\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$.

**Definisi 2.19.** [1] *Jika* $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ *adalah himpunan tak kosong vektor-vektor, maka persamaan vektor*

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r = 0,$$

*memiliki paling tidak satu solusi, yaitu*

$$k_1 = 0, k_2 = 0, \cdots, k_r = 0.$$

*Jika ini satu-satunya solusi, maka* $S$ *disebut sebagai himpunan bebas linear. Jika terdapat solusi lain, maka* $S$ *disebut sebagai himpunan tidak bebas linear.*

**Definisi 2.20.** [7] *Jika* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$*, didefinisikan ruang kolom dari* $A$ *ditulis* $Col(A)$ *adalah subruang dari* $\mathbb{C}^m$ *yang dibangun oleh vektor-vektor kolom dari* $A$.

**Definisi 2.21.** [7] *Misal* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$*, didefinisikan ruang baris dari* $A$ *ditulis* $Row(A)$ *adalah subruang dari* $\mathbb{C}^n$ *yang dibangun oleh vektor-vektor baris dari* $A$.

**Definisi 2.22.** [1] *Jika* $V$ *adalah suatu ruang vektor sebarang dan* $S = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ *adalah suatu himpunan vektor-vektor pada* $V$*, maka* $S$ *disebut suatu basis untuk* $V$ *jika dua syarat berikut terpenuhi :*

*(1)* $S$ *bebas linear.*
*(2)* $S$ *merentang di* $V$.

**Teorema 2.23.** [1] *Operasi baris elementer tidak mengubah ruang baris suatu matriks.*

**Teorema 2.24.** [1] *Misalkan* $A$ *dan* $B$ *adalah matriks-matriks yang ekivalen baris. Maka :*

*(a.) Suatu himpunan vektor-vektor kolom dari* $A$ *tertentu adalah bebas linear jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang bersesuaian dari* $B$ *adalah bebas linear.*
*(b.) Suatu himpunan vektor-vektor kolom dari* $A$ *tertentu membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari* $A$ *jika dan hanya jika vektor-vektor kolom yang bersesuaian dari* $B$ *membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari* $B$.

**Teorema 2.25.** [1] *Jika suatu matriks* $R$ *berada dalam bentuk eselon baris, maka vektor-vektor baris dengan satu utama (yaitu vektor-vektor baris taknol) membentuk suatu basis untuk ruang baris dari* $R$*, dan vektor-vektor kolom dengan satu utama dari vektor-vektor baris membentuk suatu basis untuk ruang kolom dari* $R$

**Definisi 2.26.** [1] *Dimensi dari ruang vektor* $V$ *yang berdimensi terhingga, dinotasikan dengan dim(*$V$*), didefinisikan sebagai banyaknya vektor-vektor pada suatu basis untuk* $V$*. Selain itu, ruang vektor nol didefinisikan berdimensi nol.*

**Definisi 2.27.** [1] *Dimensi dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks* $A$ *disebut rank dari* $A$ *dan dinyatakan sebagai rank(*$A$*).*

**Teorema 2.28.** [1] *Jika $A$ adalah suatu matriks sebarang, maka $rank(A) = rank(A^T)$.*

**Teorema 2.29.** [3] *Jika $A$ adalah sebarang matriks, maka rank(A) sama dengan banyaknya baris taknol dalam bentuk eselon baris tereduksi matriks $A$.*

## 2.5. *Matriks Definit Positif*

Persamaan linear dengan $n$ variabel $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{2.1}$$

dimana $a_1, a_2, \cdots, a_n$ dan $b$ adalah konstanta real yang dinamakan bentuk linear. Dalam bentuk linear semua variabel berpangkat satu, dan tidak ada hasil kali variabel pada persamaan (2.1). Dalam bentuk kuadrat suku-sukunya adalah kuadrat dari variabel atau hasil kali dua variabel. Bentuk kuadrat dalam dua variabel $x$ dan $y$ dapat ditulis sebagai

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

Bentuk kuadrat yang lebih umum didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 2.30.** [1] *Bentuk kuadrat dari $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dapat ditulis dalam bentuk*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

*dengan $A$ adalah matriks $n \times n$.*

Jika dimisalkan

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

maka (2.3) menjadi

$$x^T Ax. \tag{2.4}$$

**Definisi 2.31.** [1] *Bentuk kuadrat $x^T Ax$ disebut definit positif jika $x^T Ax > 0$ untuk semua $x \neq \mathbf{0}$.*

**Lema 2.32.** [4] *Sebarang matriks definit positif adalah matriks nonsingular.*

**Bukti.** Misalkan A adalah matriks singular, terdapat vektor taknol sedemikian sehingga $Ax = 0$. Oleh karena itu $x^T Ax = 0$ dan $A$ tidak bisa menjadi matriks definit positif. □

### 2.6. *Pengertian Invers Moore-Penrose*

Invers Moore-Penrose sering juga dikenal dengan *pseudoinvers*. Berikut adalah definisi invers Moore-Penrose.

**Definisi 2.33.** [2] *Misalkan* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. *Matriks* $A$ *dikatakan mempunyai invers Moore-Penrose jika terdapat matriks* $X \in \mathbb{C}^{n\times m}$ *sedemikian sehingga*

*(1)* $AXA = A$.
*(2)* $XAX = X$.
*(3)* $(AX)^* = AX$.
*(4)* $(XA)^* = XA$.

*Matriks* $X$ *pada definisi di atas ditulis sebagai* $A^+$.

### 2.7. *Faktorisasi Full Rank*

**Definisi 2.34.** [7] *Misalkan* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *dengan* $r > 0$. *Jika terdapat* $F \in \mathbb{C}_r^{m\times r}$ *dan* $G \in \mathbb{C}_r^{r\times n}$ *sedemikian sehingga* $A = FG$, *maka* $A$ *dikatakan memiliki faktorisasi full rank.*

**Teorema 2.35.** [8] *Misalkan* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *dengan* $rank(A) > 0$ *dan* $A = FG$ *adalah faktorisasi full rank dari* $A$. *Maka*

*(1)* $F^+ = (F^*F)^{-1}F^*$.
*(2)* $F^+F = I$ *dengan* $I$ *matriks identitas* $r \times r$.
*(3)* $G^+ = G^*(GG^*)^{-1}$.
*(4)* $GG^+ = I$ *dengan* $I$ *matriks identitas* $r \times r$.
*(5)* $A^+ = G^+F^+$.

**Bukti.** Misalkan $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ dengan $rank(A) > 0$ dan $A = FG$ adalah faktorisasi *full rank* dari $A$. Dengan menggunakan keempat persamaan Penrose pada Definisi (2.9), diperoleh

(1) $FF^+F = F(F^*F)^{-1}(F^*F) = FI = F$.
(2) $F^+FF^+ = (F^*F)^{-1}(F^*F)(F^*F)^{-1}F^* = I(F^*F)^{-1}F^* = F^+$.
(3) $(FF^+)^* = F^{**}(F^*F)^{-1}F^* = F(F^*F)^{-1}F^* = FF^+$.
(4) $(F^+F) = (F^*F)^{-1}(F^*F) = I$. □

## 3. Penghitungan Invers Moore-Penrose dengan Metode Ben Noble

Penghitungan invers Moore-Penrose dengan metode Ben Noble menggunakan partisi matriks. Berikut ini langkah-langkah menghitung invers Moore-Penrose.

Misalkan $A$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dengan $rank(A) = r$. Matriks $A$ dipartisi dalam bentuk

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

dengan $A_{11}$ berukuran $r \times r$, dan matriks $A_{11}$ adalah matriks non-singular. Jika matriks $A_{11}$ adalah singular, maka matriks $A$ dapat dikalikan dengan matriks permutasi untuk merubah baris dan kolom sehingga matriks $A_{11}$ menjadi matriks non-singular. Misalkan $T$ dan $S$ adalah matriks permutasi, maka

$$TAS = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Karena rank $A$ adalah $r$, $m-r$ baris terakhir adalah kombinasi linear dari $r$ pertama, sehingga terdapat matriks $P_{(m-r)\times r}$ yang memenuhi

$$A_{21} = PA_{11} \text{ dan } A_{22} = PA_{12}, \tag{3.3}$$

dan terdapat matriks $Q_{r\times(n-r)}$ yang memenuhi

$$A_{12} = A_{11}Q \text{ dan } A_{22} = A_{21}Q, \tag{3.4}$$

sehingga

$$P = A_{21}A_{11}^{-1} \text{ dan } Q = A_{11}^{-1}A_{12}, \tag{3.5}$$

dengan mengkombinasikan persamaan kedua dalam (3.3) dan persamaan pertama dalam (3.4) diperoleh

$$A_{22} = PA_{11}Q. \tag{3.6}$$

Oleh karena itu matriks $A$ dapat ditulis dalam bentuk

$$A = T^T \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} A_{11} \begin{bmatrix} I & Q \end{bmatrix} S^T, \tag{3.7}$$

dengan $I$ adalah matriks identitas berukuran $r \times r$.

Berdasarkan Definisi (2.34) diperoleh

$$F = T^T \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} A_{11}, \text{ dan } G = \begin{bmatrix} I & Q \end{bmatrix} S^T. \tag{3.8}$$

**Teorema 3.1.** [6] *Misalkan* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *dipartisi ke dalam persamaan (3.7), maka invers Moore-Penrose matriks* $A$ *adalah*

$$A^+ = S \begin{bmatrix} I \\ Q^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + QQ^* \end{bmatrix}^{-1} A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} I + P^*P \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I & P^*P \end{bmatrix} T, \tag{3.9}$$

*dengan* $Q \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ *dan* $P \in \mathbb{C}^{(m-r)\times r}$.

**Bukti.** Oleh karena

$$A = T^T \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} S^T$$

dapat dikenakan faktorisasi *full rank* dengan faktorisasi *full rank* dari $A$ adalah

$$F = T^T \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} A_{11} \text{ dan } G = \begin{bmatrix} I & Q \end{bmatrix} S^T,$$

sehingga diperoleh

$$A^{+} = S \begin{bmatrix} I \\ Q^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + QQ^{*} \end{bmatrix}^{-1} A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} I + P^{*}P \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \ P^{*}P \end{bmatrix} T \tag{3.10}$$

dengan $Q \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ dan $P \in \mathbb{C}^{(m-r)\times r}$. $\square$

Persamaan (3.10) dapat digunakan mengingat matriks $\begin{bmatrix} I + P^{*}P \end{bmatrix}$ adalah definit-positif karena

$$\mathbf{u}^{*} \begin{bmatrix} I + P^{*}P \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{u}^{*}\mathbf{u} + [P\mathbf{u}]^{*}[P\mathbf{u}] > 0 \quad \textit{untuk} \ \ \mathbf{u} \neq \mathbf{0}.$$

Berdasarkan Lemma (2.32), matriks $\begin{bmatrix} I + P^{*}P \end{bmatrix}$ adalah matriks non-singular.

**Akibat 3.2.** *Jika* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}$ *dengan* $\det(A_{11}) \neq 0$ *dan* $\nvdash$ *adalah matriks nol maka*

$$A^{+} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix}.$$

Berikut adalah akibat berdasarkan Teorema 3.1.

**Akibat 3.3.** *Jika* $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *dengan* $\det(A_{11}) \neq 0$ *maka*

$$A^{+} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.1. *Algoritma Penghitungan Invers Moore-Penrose*

(1) Menentukan $rank(A)$ dengan melakukan OBE terhadap matriks $A$ sehingga membentuk matriks eselon baris tereduksi.

(2) Misalkan $rank(A) > 0$, matriks $A$ dipartisi ke bentuk

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

dimana matriks $A_{11}$ berukuran $r \times r$.

(3) Jika matriks $A_{11}$ singular, maka kalikan matriks $A$ dengan matriks permutasi $T$ dan $S$ sehingga matriks $A_{11}$ non-singular.

$$TAS = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

(4) Menentukan invers matriks $A_{11}$.

(5) Menentukan matriks $P \in \mathbb{C}^{r\times(n-r)}$ dengan rumus $P = A_{21}A_{11}^{-1}$.

(6) Menentukan matriks $Q \in \mathbb{C}^{(m-r)\times r}$ dengan rumus $Q = A_{11}^{-1}A_{12}$.

(7) Hitung Invers Moore-Penrose dengan rumus

$$A^{+} = S \begin{bmatrix} I \\ Q^{*} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I + QQ^{*} \end{bmatrix}^{-1} [A_{11}]^{-1} \begin{bmatrix} I + P^{*}P \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I \ P^{*} \end{bmatrix} T$$

## 4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan tentang penghitungan invers Moore-Penrose dari matriks $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ dengan $rank(A) > 0$ menggunakan metode Ben-Noble, dapat disimpulkan bahwa metode ini menggunakan partisi matriks dan faktorisasi *full rank*. Berikut adalah langkah menentukan invers Moore Penrose dari matriks $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$.

1. Tentukan rank(A), kemudian partisi matriks $A$ menjadi
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$
dengan $A_{11}$ matriks non-singular berukuran $r \times r$.
2. Jika matriks $A_{11}$ singular, maka kalikan matriks $A$ dengan matriks permutasi $T$ dan $S$ sehingga matriks $A_{11}$ non-singular.
$$TAS = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$
3. Tentukan invers matriks $A_{11}$.
4. Tentukan matriks $P$ dan $Q$ menggunakan persamaan (3.5).
5. Hitung invers Moore-Penrose matriks $A$ dengan persamaan
$$A^+ = \begin{bmatrix} I \\ Q^* \end{bmatrix} \left[\, I + QQ^* \,\right]^{-1} [A_{11}]^{-1} \left[\, I + P^*P \,\right]^{-1} \left[\, I \;\; P^* \,\right]. \tag{4.1}$$

## Daftar Pustaka


[1] Anton, H. 2005. *Aljabar Linear Elementer*. Edisi Kelima. Erlangga. Jakarta

[2] Ben-Israel dan Thomas N.E Greville. 2003. *Generalized Inverses Theory and Applications*. Springger Verlag, New York.

[3] Broida, J.G dan Williamson, S.G. 2012. *Comprehensive Introduction To Linear Algebra*. Creative Commons

[4] Cormen, T.H dkk. 2009 *Introduction To Algorithms*. Massachusetts Institute of Technology. London

[5] Laub. A 2012. *Matrix Analysis*. SIAM.

[6] Noble, B. 1966. *A Method For Computing The Generalized Inverses of a Matrix*. Vol 3, No.44. SIAM

[7] Piziak, R dan P.L. Odel. 2007. *Matrix Theory From Generalized Inverses to Jordan Form*. Taylor dan Francis, Canada

[8] Piziak, R dan P.L. Odel. 1999. Full Rank Factorization of Matrices. *Mathematics Magazine*. Vol 72. No 3 : 193 − 201