Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **4** Hal. 19 – 23
ISSN : 2303–291X

BILANGAN KROMATIK LOKASI DARI GRAF SPINNER

CHINTIA DEVA RIANTI, NARWEN
Jurnal Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : chintia.deva@yahoo.com

Abstrak. Misalkan graf G merupakan graf terhubung. Pewarnaan titik pada graf $G = (V, E)$ adalah suatu pemetaan $c : V \to \mathbb{N}$, dimana $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli sedemikian sehingga untuk setiap $u, v \in V(G)$ yang bertetangga, berlaku $c(u) \neq c(v)$. Jika banyak warna yang digunakan sebanyak k, maka G dikatakan mempunyai k-pewarnaan. Bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan titik sejati disebut bilangan kromatik dari G, dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ merupakan partisi dari himpunan titik di G ke dalam kelas-kelas warna yang saling bebas, dimana S_i merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Representasi v terhadap Π disebut kode warna, dinotasikan $c_\pi(v)$, merupakan pasangan berurut dengan k unsur yaitu

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik pada G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan $\chi_L(G)$. Pada tulisan ini akan dibahas tentang penentuan bilangan kromatik lokasi dari graf Spinner $C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K}_1$.

Kata Kunci: Kelas warna, Kode warna, Bilangan kromatik lokasi, Graf Spinner

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu kajian ilmu matematika. Graf disajikan dalam bentuk sederhana yaitu dalam bentuk titik dan sisi. Pengaitan titik-titik akan membentuk sisi sehingga membentuk suatu pola graf tertentu. Penggunaan teori graf sudah banyak diterapkan dalam berbagai ilmu antara lain jaringan komunikasi, transportasi, riset operasi, penentuan jarak terpendek antara dua buah kota, dan penentuan waktu tersingkat dalam pengiriman pesan antara dua buah terminal pada jaringan komputer.

Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, graf telah menghasilkan banyak kajian baru. Salah satu kajiannya yaitu tentang pewarnaan lokasi pada suatu graf. Kajian pewarnaan lokasi untuk pertama kalinya dibahas oleh Chartrand dkk (2002), yang dikembangkan dari dua konsep yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi pada graf. Pewarnaan graf dapat diterapkan dalam kehidupan sehari-hari seperti masalah penjadwalan kuliah dan masalah pada pengaturan waktu pada lampu lalu lintas disuatu persimpangan jalan.

2. Landasan Teori

Bilangan kromatik lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk[5]. Konsep ini merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan graf. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$, dimana S_i merupakan himpunan titik-titik di G yang berwarna i, untuk $1 \leq i \leq k$. Representasi v terhadap Π disebut kode warna, dinotasikan $c_\pi(v)$, merupakan vektor dengan banyak k unsur yaitu

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k)) \ ,$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x)|x \in S_i\}$, untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik pada G mempunyai kode warna yang berbeda terhadap Π, maka c disebut pewarnaan lokasi. Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan $\chi_L(G)$.

Berikut ini adalah teorema dasar terkait bilangan kromatik lokasi. Himpunan tetangga dari titik v, dinotasikan dengan $N(v)$.

Teorema 2.1. *[5] Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik pada graf G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.*

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \cdots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G kedalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$ maka $d(u, C_i) = d(v, C_i)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Dengan demikian, haruslah $c(u) \neq c(v)$. $\square$

Akibat 2.2. *[5] Jika G adalah suatu graf terhubung yang memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun di G, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.*

Bukti. Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun $x_1, x_2, \cdots, x_k$ di G. Dari Teorema 2.1 setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna berbeda untuk setiap x_i, $i = 1, 2, \cdots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k + 1$. $\square$

Misalkan terdapat graf siklus C_3 dan graf lintasan P_2. Hasil kali kartesius antara kedua graf tersebut adalah graf $C_3 \times P_2$. Graf spinner $C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K_1}$ diperoleh dari operasi korona antara graf $C_3 \times P_2$ dengan komplemen dari graf lengkap K_1, yaitu $\overline{K_1}$.

Pada Gambar 1 diberikan graf Spinner $C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K_1}$. Dapat dilihat bahwa

$$
\begin{aligned}
V(C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K_1}) &= \{x_1, x_2, \cdots, x_6\} \cup \{x_{11}, \cdots, x_{61}\} \\
E(C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K_1}) &= \{x_1x_2, x_2x_3, x_1x_3\} \cup \{x_4x_5, x_5x_6, x_4x_6\} \cup \{x_1x_4, x_2x_5, x_3x_6\} \\
&\quad \cup \{x_ix_{i1} \mid 1 \leq i \leq 6\}.
\end{aligned}
$$

3. Bilangan Kromatik Lokasi dari Graf Spinner

Pada bab ini akan dibahas tentang penentuan bilangan kromatik lokasi graf spinner $C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K_1}$, seperti pada Teorema 2.1 berikut.

Teorema 3.1. $\diamondsuit$ *Misalkan terdapat graf* $G \simeq C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K_1}$. *Maka* $\chi_L(G) = 4$.

Bukti. Misalkan $G \simeq C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K_1}$. Akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) \geq 4$. Pada graf $C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K_1}$ terdapat dua graf C_3 yang dimisalkan dengan C_3' dan $C"_3$, dimana titik dari graf C_3' adalah x_1, x_2, x_3 dan titik dari graf $C"_3$ adalah x_4, x_5, x_6. Karena setiap titik pada graf C_3 bertetangga, maka banyak warna yang digunakan untuk pewarnaan lokasinya adalah 3. Hal ini mengakibatkan $\chi_L(G) \geq 3$. Andaikan banyak warna yang digunakan pada graf G adalah 3, maka akan selalu terdapat 2 titik dominan di G yaitu pada titik C_3' dan $C"_3$ sedemikian sehingga tidak memenuhi syarat pewarnaan lokasi. Oleh karena itu, tiga warna tidak cukup untuk pewarnaan lokasi pada graf G. Akibatnya $\chi_L(G) \geq 4$.

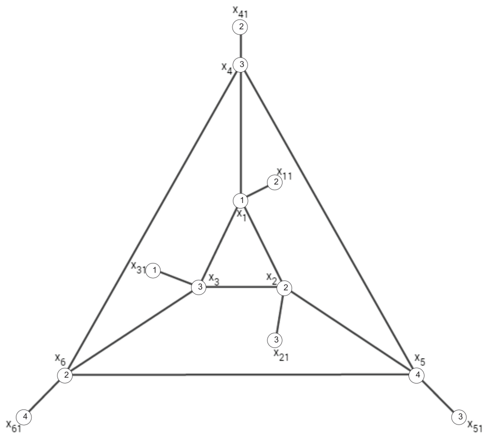
Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) \leq 4$ seperti pada Gambar 1. Misalkan dikontruksikan pewarnaan sebagai berikut $c : V(G) \to \{1, 2, 3, 4\}$, sedemikian sehingga

$$
\begin{aligned}
&c(x_1) = c(x_{31}) = 1, \\
&c(x_2) = c(x_{11}) = c(x_6) = c(x_{41}) = 2, \\
&c(x_3) = c(x_{21}) = c(x_4) = c(x_{51}) = 3, \\
&c(x_5) = c(x_{61}) = 4.
\end{aligned}
$$

Berdasarkan konstruksi tersebut,diperoleh kelas warna sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \{x_1, x_{31}\}, \\
S_2 &= \{x_2, x_{11}, x_6, x_{41}\}, \\
S_3 &= \{x_3, x_{21}, x_4, x_{51}\}, \\
S_4 &= \{x_5, x_{61}\}.
\end{aligned}
$$

Untuk menunjukkan bahwa $\chi_L(G) \leq 4$, cukup dengan menunjukkan bahwa pewarnaan titik terhadap $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ tersebut memenuhi syarat pewarnaan



Gambar 1. Graf Spinner $C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K_1}$

lokasi. Kode warna yang diperoleh adalah :

$$\begin{aligned}
c_\Pi(x_1) &= (d(x_1,S_1),d(x_1,S_2),d(x_1,S_3),d(x_1,S_4)) = (0,1,1,2),\\
c_\Pi(x_{31}) &= (d(x_{31},S_1),d(x_{31},S_2),d(x_{31},S_3),d(x_{31},S_4)) = (0,2,1,3),\\
c_\Pi(x_2) &= (d(x_2,S_1),d(x_2,S_2),d(x_2,S_3),d(x_2,S_4)) = (1,0,1,1),\\
c_\Pi(x_6) &= (d(x_6,S_1),d(x_6,S_2),d(x_6,S_3),d(x_6,S_4)) = (2,0,1,1),\\
c_\Pi(x_{11}) &= (d(x_{11},S_1),d(x_{11},S_2),d(x_{11},S_3),d(x_{11},S_4)) = (1,0,2,3)\\
c_\Pi(x_{41}) &= (d(x_{41},S_1),d(x_{41},S_2),d(x_{41},S_3),d(x_{41},S_4)) = (2,0,1,2),\\
c_\Pi(x_3) &= (d(x_3,S_1),d(x_3,S_2),d(x_3,S_3),d(x_3,S_4)) = (1,1,0,2),\\
c_\Pi(x_4) &= (d(x_4,S_1),d(x_4,S_2),d(x_4,S_3),d(x_4,S_4)) = (1,1,0,1),\\
c_\Pi(x_{21}) &= (d(x_{21},S_1),d(x_{21},S_2),d(x_{21},S_3),d(x_{21},S_4)) = (2,1,0,2),\\
c_\Pi(x_{51}) &= (d(x_{51},S_1),d(x_{51},S_2),d(x_{51},S_3),d(x_{51},S_4)) = (3,2,0,1),\\
c_\Pi(x_5) &= (d(x_5,S_1),d(x_5,S_2),d(x_5,S_3),d(x_5,S_4)) = (2,1,1,0),\\
c_\Pi(x_{61}) &= (d(x_{61},S_1),d(x_{61},S_2),d(x_{61},S_3),d(x_{61},S_4)) = (3,1,2,0).
\end{aligned}$$

Karena setiap titik pada G memiliki kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi pada graf G. Jadi, diperoleh $\chi_L(G) \leq 4$.

Dari pembuktian diatas diperoleh bahwa $\chi_L(G) \geq 4$ dan $\chi_L(G) \leq 4$, sehingga dapat disimpulkan bahwa $\chi_L(G) = 4$. □

4. Kesimpulan

Diperoleh bilangan kromatik lokasi pada graf $G = C_3 \times P_2 \bigodot \overline{K_1}$ adalah 4.

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada ibu Dr. Lyra Yulianti, ibu Dr. Des Welyyanti, ibu Monika Rianti Helmi, M.Si, dan ibu Dr. Arrival Rince Putri yang telah memberikan kritik

dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Asmiati, H. Assiyatun dan E. T. Baskoro. 2011. Locating chromatic number of Amalgamation of stars. *ITB Journal of Science*. **1**: 1 – 8

[2] Baskoro, E. T. dan I. A. Purwasih. 2012. The locating chromatic number for corona product of graph. *Southeast Asian Journal of Sciences*. **1**: 124 – 134

[3] Bahtoei, A. dan B. Ommomi. 2012. On the locating chromatic number of cartesian product of graphs. *Cornell University Library*, http://arxiv.org/abd/1106.3452

[4] Bondy, J. A dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application*. The Macmillan Press LTD, London

[5] Chartrand, G., D. Erwin, M. A. Henning, P.J. Slater dan P. Zhang. 2002. The locating chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**: 89 – 101

[6] Chartrand, G., dkk . 2003. Graphs of order n with locating-cromatic number n - 1. *Science Direct, Discrete Math.* **269**: 65 – 79