BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* DAN *STRONG RAINBOW CONNECTION* PADA GRAF JAHANGIR $J_{2,m}$

DWI NOVRI ASMARA, SYAFRIZAL SY, EFFENDI

*Program Studi Magister Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 email : dwi.novriasmara1990@gmail.com, syafrizalsy@gmail.com, effendi.sjarief@yahoo.com*

Abstrak. Suatu Graf Jahangir $J_{(n,m)}$ untuk $n \geq 2, m \geq 2$ adalah suatu graf dengan $(nm + 1)$ titik yaitu graf yang terdiri dari satu *Cycle* (C_{nm}) dengan menambahkan satu titik yang bertetangga ke m titik dari C_{nm} yang berjarak n satu sama lain di C_{nm} . Suatu graf dikatakan *rainbow connected*, jika setiap lintasan yang menghubungkan dua titik u, v di G memuat *rainbow $u-v$ path* dan suatu graf dikatakan *strong rainbow connected*, yang jika terdapat suatu lintasan dengan panjang $d(u, v)$ yang menghubungkan dua titik u, v memuat *rainbow $u-v$ geodesic*. Pada makalah ini diperoleh $rc(J_{2,m})$ dan $src(J_{2,m})$ untuk $2 \leq m \leq 8$.

Kata Kunci: Graf Jahangir, *rainbow connection number*, *strong rainbow connection number*

1. Pendahuluan

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G), \psi_G)$ dengan $V(G)$ himpunan titik tak kosong, $E(G)$ adalah himpunan sisi yang menghubungkan titik-titik pada G dan suatu fungsi keterkaitan (*incidency function*) ψ_G yang mengaitkan setiap sisi di G dengan pasangan titik di G . Banyaknya titik di G disebut orde (*order*) dari G yang dinotasikan dengan $|V(G)| = v$, dan banyaknya sisi pada G disebut ukuran *size* dari G dinotasikan dengan $|E(G)| = e$. [1].

Konsep dari *rainbow connection* diperkenalkan oleh Chartrand [2] pada tahun 2008. Misalkan G merupakan suatu graf terhubung tak trivial, didefinisikan suatu pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}; n \in \mathbb{N}$, dimana sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan $u - v$ path dikatakan sebagai *rainbow path* pada G jika tidak terdapat dua sisi pada *path* yang berwarna sama. Suatu graf G dikatakan *rainbow-connected* terhadap pewarnaan sisi, jika G memuat *rainbow $u-v$ path* untuk setiap dua titik u dan v pada G . Jika graf G bersifat *rainbow connected* maka pewarnaan sisinya dinamakan *rainbow coloring* pada G .

Konsep tentang *strong rainbow connection* diperkenalkan oleh X. Hou dan Y. Sun [4] pada tahun 2010. Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G . Untuk setiap lintasan yang menghubungkan dua titik u, v di G didefinisikan sebagai suatu *rainbow $u-v$ geodesic* jika memuat lintasan *rainbow $u-v$ path* dengan panjang $d(u, v)$, dimana $d(u, v)$ adalah jarak antara titik u dan v (panjang $u-v$

path terpendek). Suatu graf G dikatakan *strong rainbow connected* jika G memuat suatu *rainbow u - v geodesic* untuk setiap lintasan dua titik u, v di G . Dalam hal ini, pewarnaan c dinamakan *strong rainbow coloring* dari graf terhubung G disimbolkan dengan $src(G)$, yang didefinisikan sebagai minimal dari banyaknya warna yang dibutuhkan untuk membuat graf G bersifat *strong rainbow connected*.

2. Graf Jahangir ($J_{(2,m)}$), dengan $2 \leq m \leq 8$

Suatu Graf Jahangir $J_{(n,m)}$ untuk $n \geq 2, m \geq 2$ adalah suatu graf dengan $(nm + 1)$ titik yaitu graf yang terdiri dari satu *Cycle* (C_{nm}) dengan menambahkan satu titik yang bertetangga ke m titik dari C_{nm} yang berjarak n satu sama lain di C_{nm} [3]. Pada Gambar 1 diberikan beberapa contoh graf Jahangir ($J_{(2,m)}$) dengan $2 \leq m \leq 8$.

Gambar 1. [3] Graf Jahangir $J_{(2,m)}$ dengan $2 \leq m \leq 8$

3. Bilangan *Rainbow Connection* dan *Strong Rainbow Connection* Graf Jahangir ($J_{(2,m)}$) dengan $2 \leq m \leq 8$

Pada makalah ini diperoleh *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* untuk graf Jahangir $J_{(2,m)}$ dengan $2 \leq m \leq 8$, seperti yang disajikan dalam Teorema 3.1 berikut.

Teorema 3.1. $\diamond$ Untuk bilangan bulat $2 \leq m \leq 8$ dan bilangan asli $1 \leq k \leq 2$, bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* dari graf Jahangir $J_{(2,m)}$

adalah

$$rc(J_{2,m}) = src(J_{2,m}) = \begin{cases} \frac{m}{2} + 1, & m = 4k - 2, \\ \frac{m}{2} + 2, & m = 4k, \\ \frac{m-1}{2} + 2, & m \text{ ganjil.} \end{cases} \quad (3.1)$$

Bukti.

Kasus 1. Untuk $m = 4k - 2$ dan $1 \leq k \leq 2$.

Akan dibuktikan bahwa untuk $m = 4k - 2$ dan $1 \leq k \leq 2$, berlaku $rc(J_{2,m}) = src(J_{2,m}) = \frac{m}{2} + 1$. Pandang beberapa kasus berikut.

(a) $m = 2$.

Notasikan $V(J_{2,2}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut;

$$c(e) = \begin{cases} 1, & e = v_1v_2, v_3v_4, \\ 2, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Karena $diam(J_{2,4}) = 2$, maka haruslah $2 \leq rc(J_{2,4}) \leq src(J_{2,4})$. Agar setiap lintasan memuat *rainbow u-v path*, maka warna yang digunakan minimal sebanyak 2 warna. Misalkan diberikan pewarnaan dengan 2 warna pada graf Jahangir $J_{2,4}$, maka untuk setiap dua titik u dan v di graf $J_{2,4}$ terdapat *rainbow u-v path* yang juga merupakan *rainbow u-v geodesic*. Jadi diperoleh $rc(J_{2,2}) = src(J_{2,2}) \leq 2$. Sehingga didapatkan bahwa $rc(J_{2,2}) = src(J_{2,2}) = 2$.

(b) $m = 6$.

Notasikan $V(J_{2,6}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{13}\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} 1, & e = v_1v_2, v_5v_6, v_9v_{10}, v_5v_{13} \text{ dan } v_7v_{13}, \\ 2, & e = v_2v_3, v_6v_7, v_{10}v_{11} \text{ dan } v_9v_{13}, \\ 3, & e = v_3v_4, v_7v_8, v_1v_{13}, v_{11}v_{12} \text{ dan } v_{11}v_{13}, \\ 4, & e = v_4v_5, v_8v_9, v_3v_{13} \text{ dan } v_1v_{12}. \end{cases}$$

Diketahui $diam(J_{2,6}) = 4$, sehingga $4 \leq rc(J_{2,6}) \leq src(J_{2,6})$. Agar setiap lintasan memuat *rainbow u-v path* haruslah warnanya minimal sebanyak 4-warna. Jika pada graf Jahangir $J_{2,6}$ diberikan 4-warna untuk tiap sisi-sisinya, maka untuk setiap dua titik u dan v di graf Jahangir $J_{2,6}$ terdapat *rainbow u-v path* yang juga merupakan *rainbow u-v geodesic*. Jadi graf Jahangir $J_{2,6}$ mempunyai *rainbow 4-coloring* yang sekaligus merupakan *strong rainbow 4-coloring*. Jadi diperoleh $rc(J_{2,6}) = src(J_{2,6}) \leq 4$. Sehingga didapatkan bahwa $rc(J_{2,6}) = src(J_{2,6}) = 4$.

Ilustrasi *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* untuk graf Jahangir $J_{2,4}$ dan $J_{2,6}$ dapat dilihat pada Gambar 2.

Kasus 2. Untuk $m = 4k$ dan $1 \leq k \leq 2$.

Akan ditunjukkan bahwa $rc(J_{2,m}) = src(J_{2,m}) = \frac{m}{2} + 2$ untuk $m = 4k$ dan $1 \leq k \leq 2$. Didefinisikan pewarnaan sisi pada $J_{(2,m)}$ sebagai berikut:

Gambar 2. $rc(J_{(2,2)}) = src(J_{(2,2)}) = 2$ dan $rc(J_{(2,6)}) = src(J_{(2,6)}) = 4$

(a) $m = 4$.

Misalkan $V(J_{(2,4)}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut;

$$c(e) = \begin{cases} 1, & e = v_1v_2, v_5v_6, \\ 2, & e = v_2v_3, v_6v_7, \\ 3, & e = v_1v_9, v_3v_4, v_7v_8, \text{ dan } v_7v_9, \\ 4, & e = v_5v_6, v_4v_8, v_3v_9, \text{ dan } v_1v_8. \end{cases}$$

Diketahui $diam(J_{(2,4)}) = 4$, sehingga haruslah $4 \leq rc(J_{(2,4)}) \leq src(J_{(2,4)})$. Agar setiap lintasan memuat *rainbow u-v path* haruslah warnanya minimal sebanyak 4-warna. Jika pada graf Jahangir $J_{(2,4)}$ diberikan 4-warna untuk tiap sisi-sisinya, maka untuk setiap dua titik u dan v di graf Jahangir $J_{(2,4)}$ terdapat *rainbow u-v path* yang juga merupakan *rainbow u-v geodesic*. Jadi graf Jahangir $J_{(2,4)}$ mempunyai *rainbow 4-coloring* dan *strong rainbow 4-coloring*. Jadi diperoleh $rc(J_{(2,4)}) = src(J_{(2,4)}) \leq 4$. Sehingga, $rc(J_{(2,4)}) = src(J_{(2,4)}) = 4$.

(b) $m = 8$.

Misalkan $V(J_{(2,8)}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{17}\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut;

$$c(e) = \begin{cases} 1, & e = v_1v_2, v_7v_8, v_{12}v_{13}, \text{ dan } v_9v_{17}, \\ 2, & e = v_2v_3, v_8v_9, v_{13}v_{14}, \text{ dan } v_1v_{17}, \\ 3, & e = v_3v_4, v_9v_{10}, v_{14}v_{15}, \text{ dan } v_7v_{17}, \\ 4, & e = v_4v_5, v_{10}v_{11}, v_{15}v_{16}, \text{ dan } v_{11}v_{17}, \\ 5, & e = v_5v_6, v_{11}v_{12}, v_{15}v_{17}, v_{13}v_{17}, \text{ dan } v_1v_{16}, \\ 6, & e = v_6v_7, v_5v_{17}, \text{ dan } v_3v_{17}. \end{cases}$$

Diketahui $diam(J_{(2,8)}) = 4$, sehingga haruslah $4 \leq rc(J_{(2,8)}) \leq src(J_{(2,8)})$. Agar setiap lintasan memuat *rainbow u-v path* haruslah warnanya minimal sebanyak 4-warna. Jika pada graf Jahangir $J_{2,8}$ diberikan 4 atau 5 warna, terdapat dua titik u dan v yang tidak memuat *rainbow u-v path*. Jika diberikan 6 warna, diperoleh bahwa untuk setiap dua titik u dan v di graf Jahangir $J_{2,6}$ terdapat *rainbow u-v path* yang juga merupakan *rainbow u-v geodesic*. Jadi graf Jahangir $J_{2,8}$ mempunyai *rainbow 6-coloring*

dan *strong rainbow 6-coloring*. Jadi diperoleh batas atas bilangan *rainbow connection* yang bernilai sama dengan *strong rainbow connection* pada graf Jahangir, yaitu $rc(J_{2,8}) = src(J_{2,8}) = 6$.

Ilustrasi *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* untuk graf Jahangir $J_{(2,4)}$ dan $J_{2,8}$ dapat dilihat pada Gambar 3.

Gambar 3. $rc(J_{2,4}) = src(J_{2,4}) = 4$ dan $rc(J_{2,8}) = src(J_{2,8}) \leq 6$

Kasus 3. Untuk m ganjil.

Dibuktikan batas atas dari bilangan *strong rainbow connection* dari graf Jahangir yaitu $src J_{(2,m)} \leq \frac{m-1}{2} + 2$. Didefinisikan pewarnaan sisi pada $J_{(2,m)}$ sebagai berikut.

(a) $m = 3$

Misalkan $V(J_{2,3}) = \{v_1, v_2, \dots, v_7\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut;

$$c(e) = \begin{cases} 1, & e = v_1v_2, v_4v_5, \\ 2, & e = v_2v_3, v_5v_6, \\ 3, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Diketahui $diam(J_{2,3}) = 3$, sehingga $3 \leq rc(J_{2,3})$. Agar setiap lintasan memuat *rainbow u-v path* haruslah warnanya minimal sebanyak 3—warna. Jika pada graf Jahangir $J_{2,3}$ diberikan 3—warna untuk tiap sisi-sisinya, maka untuk setiap dua titik u dan v di graf Jahangir $J_{2,3}$ terdapat *rainbow u-v path* yang juga merupakan *rainbow u-v geodesic*. Jadi graf Jahangir $J_{2,3}$ mempunyai *rainbow 3-coloring* dan *strong rainbow 3-coloring*. Jadi diperoleh $rc(J_{2,3}) = src(J_{2,3}) \leq 3$. Sehingga, $rc(J_{2,3}) = src(J_{2,3}) = 3$.

(b) $m = 5$.

Misalkan $V(J_{2,5}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{11}\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut;

$$c(e) = \begin{cases} 1, & e = v_1v_2, v_5v_6, v_9v_{10}, \text{ dan } v_8v_{11}, \\ 2, & e = v_2v_3, v_6v_7, \text{ dan } v_{10}v_{11}, \\ 3, & e = v_3v_4, v_7v_8, \text{ dan } v_2v_{11}, \\ 4, & e = v_4v_5, v_8v_9, v_6v_{11}, v_4v_{11}, \text{ dan } v_1v_{10}. \end{cases}$$

Diketahui $diam(J_{2,5}) = 4$, sehingga $4 \leq rc(J_{2,5}) = src(J_{2,5})$. Agar setiap lintasan memuat *rainbow u-v path* haruslah warnanya minimal sebanyak 4-warna. Jika pada graf Jahangir $J_{2,3}$ diberikan 4-warna untuk tiap sisi-sisinya, maka untuk setiap dua titik u dan v di graf Jahangir $J_{2,3}$ terdapat *rainbow u-v path* yang juga merupakan *rainbow u-v geodesic*. Jadi graf Jahangir $J_{2,3}$ mempunyai *rainbow 4-coloring* dan *strong rainbow 4-coloring*. Jadi diperoleh $rc(J_{2,5}) = src(J_{2,5}) \leq 4$. Sehingga, $rc(J_{2,5}) = src(J_{2,5}) = 4$.

(c) $m = 7$.

Misalkan $V(J_{2,7}) = \{v_1, v_2, \dots, v_{15}\}$, didefinisikan pewarnaan sisi sebagai berikut;

$$c(e) = \begin{cases} 1, e = v_1v_2, v_6v_7, v_{11}v_{12}, \text{ dan } v_3v_{15}, \\ 2, e = v_2v_3, v_7v_8, v_{12}v_{13}, \text{ dan } v_1v_{15}, \\ 3, e = v_3v_4, v_8v_9, v_{13}v_{14}, v_7v_{15}, \text{ dan } v_5v_{15}, \\ 4, e = v_4v_5, v_9v_{10}, v_{13}v_{15}, v_1v_{14}, \text{ dan } v_{11}v_{15}, \\ 5, e = v_5v_6, v_9v_{15}, \text{ dan } v_{10}v_{11}. \end{cases}$$

Diketahui $diam(J_{2,7}) = 4$, sehingga $4 \leq rc(J_{2,7}) = src(J_{2,7})$. Agar setiap lintasan memuat *rainbow u-v path* haruslah warnanya minimal sebanyak 4-warna. Jika pada graf Jahangir $J_{2,7}$ diberikan 4-warna, maka masih terdapat dua buah titik u dan v yang tidak memuat *rainbow u-v path*. Jika diberikan 5-warna, maka diperoleh bahwa setiap dua titik u dan v di graf Jahangir $J_{2,7}$ terdapat *rainbow u-v path* yang juga merupakan *rainbow u-v geodesic*. Jadi graf Jahangir $J_{2,7}$ mempunyai *rainbow 5-coloring* dan *strong rainbow 5-coloring*. Jadi, $rc(J_{2,7}) = src(J_{2,7}) \leq 5$. Sehingga, $rc(J_{2,7}) = src(J_{2,7}) = 5$.

Ilustrasi *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* untuk graf Jahangir $J_{2,3}$, $J_{2,5}$ dan $J_{2,7}$ dapat dilihat pada Gambar 4.

Gambar 4. $rc(J_{2,3}) = src(J_{2,3}) = 3$, $rc(J_{2,5}) = src(J_{2,5}) = 4$ dan $rc(J_{2,7}) = src(J_{2,7}) = 5$

□

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini telah diperoleh bahwa bilangan *rainbow connection* dan *strong rainbow connection* untuk graf Jahangir $J_{2,m}$ dengan $2 \leq m \leq 8$ adalah

$$rc(J_{2,m}) = src(J_{2,m}) = \begin{cases} \frac{m}{2} + 1, & m = 4k - 2, \\ \frac{m}{2} + 2, & m = 4k, \\ \frac{m-1}{2} + 2, & m \text{ ganjil.} \end{cases}$$

Daftar Pustaka

- [1] Chartrand, G dan P. Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory*, Mc Graw-Hill, International Edition, Singapore.
- [2] Chartrand, G.L. Johns, K.A. McKeon, dan P. Zhang. 2008. Rainbow Connection in Graphs, *Math. Bohem.* 133: 85 – 98.
- [3] Loerdusamy. A, Samuel. S.J dan Mathivanan, 2011. On Pebbling Jahangir Graph. *Gen. Math. Notes* 5 (2): 42 – 49
- [4] X. Li dan Y. Sun. 2013. On Strong Rainbow Connection Number of a Graph, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc* (2)36 (2): 299 – 311