BILANGAN *STRONG RAINBOW CONNECTION* PADA GRAF *BEADED WHEEL*

HAVES DERINDO, LYRA YULIANTI, SYAFRIZAL SY

*Program Studi Magister Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
 email : derindah@gmail.com, lyrayulianti@gmail.com, syafrizalsy@gmail.com*

Abstrak. Suatu graf dikatakan bersifat *strong rainbow connected*, jika untuk setiap dua titik u dan v , lintasan *rainbow* antara kedua titik tersebut adalah lintasan *geodesic*, yaitu lintasan dengan panjang $d(u, v)$. Graf *Beaded Wheel*, dinotasikan dengan $BW_{2,m}$, untuk $m \geq 3$, didefinisikan sebagai suatu graf dengan $2m + 1$ titik, yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik pada setiap jari-jari yang ada pada graf roda W_m , untuk $m \geq 3$. Graf $BW_{3,m}$, untuk $m \geq 3$, didefinisikan dengan cara serupa, yaitu dengan menambahkan dua titik pada setiap jari-jari yang ada pada graf roda W_m , untuk $m \geq 3$. Cara menentukan bilangan *strong rainbow connection* untuk $BW_{2,m}$ dan $BW_{3,m}$ adalah dengan mendefinisikan pewarnaan terhadap semua sisi pada graf sedemikian sehingga graf tersebut bersifat *strong rainbow connected*. Untuk $m = 4$, pada tulisan ini diperoleh bilangan *strong rainbow connection* pada graf *Beaded Wheel* yaitu, $src(BW_{2,4}) = 4$ dan $src(BW_{3,4}) = 5$.

Kata Kunci: Beaded Wheel, *strong rainbow connection*

1. Pendahuluan

Suatu graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G), \psi_G)$ dengan $V(G)$ himpunan *titik* tak kosong, $E(G)$ adalah himpunan *sisi* yang menghubungkan titik-titik pada G dan ψ_G merupakan suatu fungsi keterkaitan (*incidency function*) yang mengaitkan setiap sisi di G dengan pasangan titik di G . Banyaknya titik di G disebut orde (*order*) dari G yang dinotasikan dengan $|V(G)| = v$, dan banyaknya sisi pada G disebut ukuran (*size*) dari G dinotasikan dengan $|E(G)| = e$ [4].

Dalam teori graf terdapat kajian mengenai teori pewarnaan, yaitu suatu bentuk kajian ilmu yang mempelajari cara mewarnai suatu graf sedemikian sehingga tidak terdapat dua titik, sisi, atau bidang bertetangga yang berwarna sama [2]. Salah satu konsep dari pewarnaan graf adalah mengenai bilangan *strong rainbow connection*. Konsep tentang *strong rainbow connection* diperkenalkan oleh Chartrand dkk. [3] pada tahun 2008. Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G . Suatu lintasan yang menghubungkan dua titik u, v di G didefinisikan sebagai suatu *rainbow u - v geodesic* jika lintasan tersebut mempunyai panjang $d(u, v)$, dan setiap sisi pada lintasan tersebut diwarnai berbeda. Suatu graf G dikatakan *strong rainbow connected* jika untuk setiap dua titik u, v di G terdapat lintasan *rainbow u - v geodesic*. Dalam hal ini, pewarnaan c dinamakan *strong rainbow coloring* dari graf

terhubung G , sementara minimum dari banyaknya warna yang digunakan agar G bersifat *strong rainbow connected* didefinisikan sebagai bilangan strong rainbow connection, dinotasikan $src(G)$. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan *strong rainbow connection* pada graf *Beaded Wheel* $BW_{2,4}$ dan $BW_{3,4}$. Definisi graf beaded wheel diambil dari [1].

2. Graf Beaded Wheel $BW_{2,4}$ dan $BW_{3,4}$

Definisi 2.1. [1] Graf Beaded Wheel $BW_{2,m}$, untuk $m \geq 3$ adalah suatu graf yang mempunyai $2m + 1$ titik yang diperoleh dengan cara menambahkan satu titik untuk setiap jari-jari pada graf roda W_m .

Berdasarkan Definisi 2.1 maka didefinisikan graf $BW_{3,m}$, untuk $m \geq 3$ sebagai suatu graf dengan $4m + 1$ titik yang diperoleh dengan menambahkan dua titik untuk setiap jari-jari pada graf roda W_m , untuk $m \geq 3$.

Graf $BW_{2,4}$ dan graf $BW_{3,4}$ diberikan pada Gambar 1.

Gambar 1. Graf Beaded Wheel (a) $BW_{2,4}$ dan (b) $BW_{3,4}$

3. Bilangan Strong Rainbow Connection untuk $NNBW_{2,4}$ dan $BW_{3,4}$

Pada penelitian ini didefinisikan p menyatakan titik pusat, tj menyatakan titik jari-jari, dan tl menyatakan titik lingkaran. Selanjutnya, didefinisikan letak titik pada graf $BW_{2,4}$ dan $BW_{3,4}$ ditunjukkan seperti pada Gambar 1 sebelumnya.

Teorema 3.1. $\diamond$ Misalkan terdapat graf Beaded Wheel ($BW_{2,4}$), maka $src(BW_{2,4}) = 4$.

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $src(BW_{2,4}) \leq 4$. Didefinisikan cara pewarnaan

pada sisi-sisi $BW_{2,4}$ sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} i, & \text{jika } e = ptj_i, \quad 1 \leq i \leq 4, \\ s+1, & \text{jika } e = tj_s tl_s, \quad 1 \leq s \leq 3, \\ 1, & \text{jika } e = tj_4 tl_4, \\ s, & \text{jika } e = tl_s tl_{s+1}, \quad 1 \leq s \leq 3, \\ 4, & \text{jika } e = tl_4 tl_1. \end{cases}$$

Perhatikan beberapa kasus berikut.

Kasus 1: Pewarnaan pada sisi-sisi subgraf bintang ptj_i , untuk $1 \leq i \leq 4$.

Subkasus 1.

Misalkan semua sisi ptj_i diberikan warna yang sama untuk $1 \leq i \leq 4$. Maka terdapat suatu lintasan $tj_i - tj_j$ dimana $i \neq j$ untuk $i, j = 1, 2, 3, 4$ yang tidak memuat *rainbow u-v geodesic*, sedangkan lintasan tersebut merupakan lintasan dengan panjang $d(tj_i, tj_j)$. Oleh karena itu, tidak cukup diberikan satu warna saja.

Subkasus 2.

Misalkan terdapat sisi ptj_i dan ptj_j dimana $i \neq j$ untuk $i, j = 1, 2, 3, 4$ dengan warna yang sama. Maka lintasan antara $tj_i - tj_j$ bukan lintasan *rainbow u-v geodesic*, sedangkan lintasan $tj_i - tj_j$ merupakan satu-satunya lintasan dengan panjang $d(tj_i, tj_j)$. Oleh karena itu, tidak cukup diberikan dua warna saja.

Dari Subkasus (1) dan Subkasus (2) diperoleh bahwa setiap sisi ptj_i , dengan $1 \leq i \leq 4$ harus diwarnai dengan warna yang berbeda:

$$c(e) = i, \quad e = ptj_i, \quad \text{untuk } 1 \leq i \leq 4.$$

Kasus 2: Pewarnaan pada sisi-sisi $tj_i tl_i$, $1 \leq i \leq 4$.

Perhatikan bahwa, sisi-sisi tj_i tidak boleh diwarnai sama dengan sisi-sisi ptj_i , untuk $1 \leq i \leq 4$. Jika diwarnai dengan warna yang sama, maka lintasan $tl_i - ptj_i$ tidak memuat *rainbow $tl_i - ptj_i$ geodesic* sedangkan lintasan tersebut mempunyai panjang $d(tj_i, tl_i)$. Oleh sebab itu, haruslah $c(tj_i tl_i) \neq c(ptj_i)$. Salah satu pewarnaan sisi $tj_i tl_i$ didefinisikan sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} s+1, & \text{jika } e = tj_q tl_q, \quad 1 \leq q \leq 3, \\ 1, & \text{jika } e = tj_4 tl_4. \end{cases}$$

Kasus 3: Pewarnaan pada sisi lingkaran $tl_i tl_{i+1}$, $1 \leq i \leq 3$ dan sisi $tl_4 tl_1$.

Perhatikan bahwa untuk $1 \leq i \leq 2$ jika $c(tj_i tl_i) = i+1$ dan $c(tj_{i+1} tl_{i+1}) = i+2$ maka haruslah $c(tl_i tl_{i+1}) \neq i+1$ atau $c(tl_i tl_{i+1}) \neq i+2$.

Misalkan $c(tl_i tl_{i+1}) = i+1$, maka lintasan $tj_i - tl_{i+1}$ tidak memuat *rainbow $tj_i - tl_{i+1}$ geodesic*, sedangkan lintasan tersebut satu-satunya lintasan dengan panjang $d(tj_i, tl_{i+1})$ yang menghubungkan titik-titik tersebut, sehingga haruslah $c(tl_i tl_{i+1}) \neq i+1$. Selanjutnya, misalkan $c(tl_i tl_{i+1}) = i+2$ maka, lintasan $tl_i - tj_{i+1}$ tidak memuat *rainbow $tj_i - tl_{i+1}$ geodesic*, sedangkan lintasan tersebut merupakan lintasan yang pajangnya $d(tj_i, tl_{i+1})$, sehingga haruslah $c(tl_i tl_{i+1}) \neq i+2$.

Selanjutnya, jika $c(tj_3 tl_3) = 4$ dan $c(tj_4 tl_4) = 1$ maka haruslah $c(tl_3 tl_4) \neq 4$ atau $c(tl_3 tl_4) \neq 1$.

Misalkan $c(tl_3tl_4) = 4$ maka lintasan $tj_3 - tl_4$ tidak memuat *rainbow* $tj_3 - tl_4$ *geodesic*, sedangkan lintasan tersebut sepanjang $d(tj_3, tl_4)$, sehingga haruslah $c(tl_3tl_4) \neq 4$. Selanjutnya misalkan $c(tl_3tl_4) = 1$ maka, lintasan $tj_4 - tl_3$ tidak memuat *rainbow* $tj_3 - tl_4$ *geodesic*, sehingga haruslah $c(tl_3tl_4) \neq 1$. Sama halnya dengan konsep pewarnaan sebelumnya, maka haruslah $c(tl_4tl_1) \neq 1$ atau $c(tl_4tl_1) \neq 2$. Salah satu definisi pewarnaannya sebagai berikut.

$$c(e) = \begin{cases} s, & \text{jika } e = tl_s tl_{s+1}, 1 \leq s \leq 3, \\ 4, & \text{jika } e = tl_4 tl_1. \end{cases}$$

Berdasarkan ketiga kasus tersebut diperoleh bahwa, untuk setiap dua titik u, v di $BW_{2,4}$ selalu terdapat lintasan dengan panjang $d(u, v)$ yang merupakan lintasan *rainbow geodesic*. Sehingga diperoleh bahwa $src(BW_{2,4}) \leq 4$.

Selanjutnya akan ditunjukkan batas bawah dari $src(BW_{2,4})$, yaitu $src(BW_{2,4}) \geq 4$. Misalkan $src(BW_{2,4}) \leq 3$, maka minimal banyak warna yang dibutuhkan untuk membuat setiap lintasan dengan panjang $d(u, v)$ memuat *rainbow* $u-v$ *geodesic*, yaitu 3 *coloring*. Berdasarkan Kasus (1), maka banyak warna yang dibutuhkan untuk mewarnai sisi-sisi pada subgraf bintang ptj_i agar lintasan $tj_i - tj_j$ untuk $i \neq j$ memuat *rainbow* $u-v$ *geodesic*, haruslah sebanyak 4-*coloring*. Akibatnya kontradiksi dengan pemisalan sebelumnya, maka diperoleh haruslah $src(BW_{2,4}) \geq 4$.

Berdasarkan kasus-kasus di atas, terbukti bahwa $src(BW_{2,4}) \leq 4$ dan $src(BW_{2,4}) \geq 4$. Sehingga diperoleh $src(BW_{2,4}) = 4$. $\square$

Teorema 3.2. $\diamond$ Misalkan terdapat graf Beaded Wheel $BW_{3,4}$, maka $src(BW_{3,4}) = 5$.

Bukti. Pertama akan ditunjukkan bahwa $src(BW_{3,4}) \leq 5$. Definisikan cara pewarnaan pada sisi-sisi $BW_{3,4}$ sebagai berikut,

$$c(e) = \begin{cases} i, & \text{jika } e = ptj_{4+i}, 1 \leq i \leq 4, \\ 5, & \text{jika } e = tj_{4+q}tj_q, 1 \leq q \leq 4, \\ s+1, & \text{jika } e = tj_s tl_s, 1 \leq s \leq 3, \\ 1, & \text{jika } e = tj_4 tl_4.i, \text{ jika } e = tl_i tl_{i+1}, 1 \leq i \leq 3, \\ 4, & \text{jika } e = tl_4 tl_1. \end{cases}$$

Perhatikan beberapa kasus sebagai berikut.

Kasus 1: Pewarnaan pada sisi-sisi subgraf bintang $k = ptj_{4+i}, 1 \leq i \leq 4$

Berdasarkan pembuktian Teorema 3.1 Kasus (1), diperoleh bahwa sisi-sisi k haruslah diberi sebanyak k warna, yaitu

$$c(e) = i, \text{ jika } e = ptj_{4+i}, \text{ untuk } 1 \leq i \leq 4.$$

Dengan pewarnaan tersebut, lintasan $tj_{4+i}-tj_{4+j}$ dimana $i \neq j$ untuk $i, j = 1, 2, 3, 4$ merupakan lintasan dengan panjang $d(tj_{4+i}, tj_{4+j})$ yang memuat *rainbow* tj_{4+i}, tj_{4+j} *geodesic*.

Kasus 2: Pewarnaan pada sisi-sisi $s = tj_{4+i}tj_i, 1 \leq i \leq 4$.

Misalkan pewarnaan k didefinisikan $k_i = c(ptj_i)$, dan s didefinisikan $s_i = c(tj_{4+i}tj_i)$,

maka haruslah $k_j \neq s_i$. Misalkan $k_j = s_i$ maka pada lintasan dimana setiap dua titik yang dimulai dari titik tj_i ke titik yang melewati sisi subgraf bintangnya tidak akan memuat *rainbow $u-v$ geodesic*, sedangkan lintasan tersebut mempunyai panjang $d(u, v)$. Sehingga satu-satunya cara untuk mewarnai sisi-sisi s yaitu, setiap sisinya diberikan warna yang berbeda dari warna sisi-sisi pada k . Adapun cara mewarnainya didefinisikan sebagai berikut.

$$c(e) = 4 + 1, \text{ jika } e = tj_{4+q}tj_q, \text{ untuk } 1 \leq q \leq 4.$$

Kasus 3: Pewarnaan pada sisi-sisi $u = tj_i tl_i$, $1 \leq i \leq 4$

Misalkan pewarnaan u didefinisikan $u_i = c(tj_i tl_i)$ dan pewarnaan k didefinisikan $k_i = c(ptj_i)$. Berdasarkan pembuktian Teorema 3.1 kasus (2), maka haruslah $u_i \neq k_i$ agar lintasan $tl_i - p$ memuat *rainbow $u-v$ geodesic*. Salah satu definisi pewarnaannya adalah:

$$c(e) = \begin{cases} s + 1, & \text{jika } e = tj_s tl_s, 1 \leq s \leq 3, \\ 1, & \text{jika } e = tj_4 tl_4. \end{cases}$$

Kasus 4: Pewarnaan pada sisi-sisi $z = tl_i tl_{i+1}$, untuk $1 \leq i \leq 3$ dan sisi $tl_4 tl_1$

Berdasarkan pembuktian Teorema 3.1 kasus (3), maka sisi-sisi z diberikan 4 warna, sementara untuk $1 \leq i \leq 2$:

$$\begin{aligned} c(tl_i tl_{i+1}) &\neq i + 1 \text{ atau } c(tl_i tl_{i+1}) \neq i + 2, \\ c(tl_3 tl_4) &\neq m \text{ atau } c(tl_3 tl_4) \neq 1, \\ c(tl_4 tl_1) &\neq 1 \text{ atau } c(tl_4 tl_1) \neq 2. \end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk $1 \leq i \leq 4$ terdapat pewarnaan $c(tj_{4+i} tl_i) = 4 + 1$, maka untuk $1 \leq i \leq 3$, sisi $tl_i tl_{i+1}$ dan $tl_4 tl_1$ tidak boleh diwarnai dengan warna 5. Misalkan sisi-sisi tersebut diwarnai dengan warna 5 maka untuk $m = 4$, lintasan $tl_1 - tj_6, tl_2 - tj_7, tl_3 - tj_8$ dan $tl_4 - tj_5$ bukan lintasan *rainbow geodesic*. Oleh karena itu, haruslah sisi-sisi $tl_i tl_{i+1}$ dan $tl_4 tl_1$ tidak diwarnai dengan warna 5. Berdasarkan kasus di atas, maka salah satu definisi pewarnaan sebagai berikut,

$$c(e) = \begin{cases} i, & \text{jika } e = tl_i tl_{i+1}, 1 \leq i \leq 3, \\ 4, & \text{jika } e = tl_4 tl_1. \end{cases}$$

Berdasarkan Kasus (1), (2), (3) dan (4), diperoleh bahwa untuk setiap dua titik u dan v di $BW_{3,4}$, selalu terdapat lintasan dengan panjang $d(u, v)$ yang merupakan lintasan *rainbow geodesic*. Sehingga diperoleh $src(BW_{3,4}) \leq 5$.

Selanjutnya akan ditunjukkan batas bawah dari $src(BW_{3,4})$, yaitu $src(BW_{3,4}) \geq 5$. Misalkan $src(BW_{3,4}) < 5$, yaitu 4, maka minimal banyak warna yang dibutuhkan untuk membuat setiap lintasan dengan panjang $d(u, v)$ memuat *rainbow $u-v$ geodesic*, yaitu 4 *coloring*. Akan tetapi, berdasarkan Kasus (2) diperoleh bahwa banyak warna yang dibutuhkan untuk setiap dua titik yang dimulai dari tj_i ke titik yang melintasi sisi subgraf bintangnya, tidak cukup untuk membuat lintasan tersebut memuat *rainbow $u-v$ geodesic*. Oleh sebab itu diperlukan warna tambahan, yang didefinisikan sebagai

$$c(e) = 5, \text{ jika } e = tj_{4+q}tj_q, \text{ untuk } 1 \leq q \leq 4.$$

Ini kontradiksi dengan pemisalan sebelumnya bahwa $\text{src}(BW_{3,4}) < 5$, sehingga haruslah $\text{src}(BW_{3,4}) \geq 5$.

Berdasarkan kasus-kasus di atas, terbukti $\text{src}(BW_{3,4}) \leq 5$ dan $\text{src}(BW_{3,4}) \geq 5$. Sehingga diperoleh $\text{src}(BW_{3,4}) = 5$. $\square$

Daftar Pustaka

- [1] Ali, K., E.T. Baskoro dan I. Tomescu. 2009. On the Ramsey Number For Paths and Beaded Wheel. *Journal of Prime Research in Mathematics* **5**: 133 – 138
- [2] Chartrand, G. dan P. Zhang. 2005. *Introduction to Graph Theory*. Mc-Graw Hill. International Edition. Singapore
- [3] Chartrand, G., G.L Johns, K.A. McKeon, P. Zhang, Rainbow Connection in Graphs, *Math. Bohem.* **133** : 85 – 98
- [4] Reinhard, D. 2000. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. 2^{ed}, Springer: New York.
- [5] Sy, S., G. Histamedika dan L. Yulianti. 2013. The Rainbow Connection Of Fan and Sun, *Applied Mathematical Science* **7** : 3155 – 3159.
- [6] X. Li dan Y. Sun. 2013. On Strong Rainbow Connection Number of a Graph, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc* (2) **36** (2): 299 – 311