Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **1** Hal. 70 – 75
ISSN : 2303–291X

OPERATOR VEC DAN VECH PADA MATRIKS

INDA SILVIA AFNI, YANITA, NOVA NOLIZA BAKAR
Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : Afniinda@gmail.com

Abstrak. Tulisan ini membahas tentang sifat-sifat operator vec dan operator vech serta hubungan operator vec dengan hasilkali Kronecker dan matriks vec-permutasi. Teori yang diterapkan yaitu hubungan operator vec dan operator vech, hasilkali Kronecker dan matriks vec-permutasi.

Kata Kunci: Operator vec, operator vech, hasilkali Kronecker, matriks vec-permutasi

1. Pendahuluan

Operator vec dan operator vech adalah suatu operator yang terkait dengan aturan yang mengaitkan matriks $n \times n$ dengan matriks $m \times 1$. Pada operator vec matriks $n \times n$ dikaitkan dengan matriks $n^2 \times 1$, sedangkan operator vech yang simetri dikaitkan dengan matriks $\frac{1}{2}n(n+1) \times 1$

Tulisan ini membahas sifat-sifat operator vec dan operator vech pada matriks, serta hubungan operator vec dengan hasilkali Kronecker dan matriks vec-permutasi.

2. Tinjauan Teori

2.1. *Teori Matriks*

Definisi 2.1. [1] *Suatu matriks (matrix) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks.*

Definisi 2.2. [1] *Ordo atau ukuran suatu matriks adalah ukuran matriks yang menyatakan banyak baris diikuti dengan banyak kolom.*

Definisi 2.3. [1] *Jika matriks A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah $A+B$ adalah matriks yang diperoleh dengan cara menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian dengan A dan selisih $A-B$ adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaian pada B.*
Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan.

Definisi 2.4. [1] *Jika A matriks berukuran $m \times r$ dan B matriks berukuran $r \times n$ maka hasil kali AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai* *berikut: untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, di-pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Entri-entri yang bersesuaian dari baris dan kolom tersebut dikalikan, kemudian dijumlahkan hasil yang diperoleh.*

Definisi 2.5. [1] *Jika A adalah matriks berukuran $m \times n$, maka transpos dari A, dinyatakan dengan A^T, diartikan sebagai matriks $n \times m$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A, sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya.*

Teorema 2.6. [1] *Misalkan matriks A dan B berukuran sedemikian rupa sehingga operasi-operasi berikut dapat dilakukan dan misalkan k adalah skalar, maka:*

(a) $((A)^T)^T = A$.
(b) $(A+B)^T = A^T + B^T$ *dan* $(A-B)^T = A^T - B^T$.
(c) $(kA)^T = kA^T$ *dengan k adalah skalar sebarang.*
(d) $(AB)^T = B^T A^T$.

Definisi 2.7. [1] *Misalkan A adalah matriks bujursangkar yang elemennya simetri secara diagonal, maka matriks simetri dinyatakan sebagai matriks yang transposnya sama dengan dirinya sendiri.*

Definisi 2.8. [1] *Suatu matriks berukuran $n \times n$ dikatakan matriks identitas, apabila elemen diagonal utamanya bernilai 1 dan elemen yang lainnya bernilai 0. Matriks identitas berukuran $n \times n$ disimbolkan dengan I_n.*

Definisi 2.9. [1] *Jika A adalah matriks bujursangkar, dan jika terdapat matriks B yang ukurannya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut dapat dibalik (invertible) dan B disebut sebagai invers (inverse) dari A. Jika matriks B tidak dapat didefinisikan, maka A dinyatakan sebagai matriks singular.*

2.2. *Hasilkali Kronecker*

Definisi 2.10. [9] *Misalkan matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $m \times n$ dan matriks $B = [b_{kl}]$ berukuran $p \times q$, maka hasilkali Kronecker dari matriks A dan matriks B dinyatakan sebagai*

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2} & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{mp \times nq} \\ &= [a_{ij}B]. \end{aligned}$$

Teorema 2.11. [3] *Misalkan $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{p\times q}$, $C \in \mathbb{C}^{r\times s}$, $X \in \mathbb{C}^{n\times p}$, $Y \in \mathbb{C}^{r\times s}$, serta $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$ merupakan vektor kolom sebarang maka :*

(1) $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.
(2) $A \otimes (B + C) = (A \otimes B) + (A \otimes C)$.

(3) $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$.
(4) $(A \otimes B)(X \otimes Y) = AX \otimes BY$.
(5) $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$.
(6) $(\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}^T) = (\boldsymbol{y}^T \otimes \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^T$.

3. Operator Vec dan Operator Vech

Definisi 3.1. [3] *Misalkan* $X = [x_1 x_2 \cdots x_n] \in \mathbb{C}^{m\times n}$, *dimana* $x_j \in \mathbb{C}^m$, $j = 1, 2, \cdots, n$, *maka* $\boldsymbol{vec}(X)$ *dinyatakan sebagai*

$$\boldsymbol{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.2. [9],[8] *Misalkan* $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ *dan* $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$, *maka*

$$(I_p \otimes A)\boldsymbol{vec}(B) = (B^T \otimes I_m)\boldsymbol{vec}(A) = \boldsymbol{vec}(AB)\ .$$

Definisi 3.3. [2] *Misalkan sebarang matriks simetri* $X = [x_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$. *Vektor* $\boldsymbol{vech}(X) \in \mathbb{C}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ *dinyatakan sebagai*

$$\boldsymbol{vech}(X) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \sqrt{2}x_{12} \\ \vdots \\ \sqrt{2}x_{1n} \\ x_{22} \\ \sqrt{2}x_{23} \\ \vdots \\ \sqrt{2}x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definisi 3.4. [6] *Untuk sebarang matriks simetri* $X = [x_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *dinyatakan* $H = [h_{rs}] \in \mathbb{C}^{\frac{1}{2}n(n+1)\times n^2}$ *sebagai*

$$H = \begin{bmatrix}
x_{11}x_{11}^* & x_{11}x_{12}^* & \cdots & x_{11}x_{1n}^* & x_{11}x_{12}^* & \cdots & x_{11}x_{2n}^* & \cdots & x_{11}x_{nn}^* \\
x_{12}x_{11}^* & x_{12}x_{12}^* & \cdots & x_{12}x_{1n}^* & x_{12}x_{12}^* & \cdots & x_{12}x_{2n}^* & \cdots & x_{12}x_{nn}^* \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{1n}x_{11}^* & x_{1n}x_{12}^* & \cdots & x_{1n}x_{1n}^* & x_{1n}x_{12}^* & \cdots & x_{1n}x_{2n}^* & \cdots & x_{1n}x_{nn}^* \\
x_{22}x_{11}^* & x_{22}x_{12}^* & \cdots & x_{22}x_{1n}^* & x_{22}x_{12}^* & \cdots & x_{22}x_{2n}^* & \cdots & x_{22}x_{nn}^* \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{2n}x_{11}^* & x_{2n}x_{12}^* & \cdots & x_{2n}x_{1n}^* & x_{2n}x_{12}^* & \cdots & x_{2n}x_{2n}^* & \cdots & x_{2n}x_{nn}^* \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
x_{nn}x_{11}^* & x_{nn}x_{12}^* & \cdots & x_{nn}x_{1n}^* & x_{nn}x_{12}^* & \cdots & x_{nn}x_{2n}^* & \cdots & x_{nn}x_{nn}^*
\end{bmatrix},$$

dimana $h_{rs} = x_{ij}x^*_{kl}$ *dengan* x_{ij} *entri-entri pada* $\boldsymbol{vech}(X)$ *dan* x^*_{kl} *entri-entri pada* $\boldsymbol{vec}(X)$*, yang memenuhi*

$$x_{ij}x^*_{kl} = \begin{cases} 1, & \textit{jika } i = j = k = l \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}, & \textit{jika } i = k \neq j = l \textit{ atau } i = l \neq j = k, \\ 0, & \textit{selainnya.} \end{cases}$$

Definisi 3.5. [9] *Misalkan* e_{in} *adalah sebuah vektor kolom n-tuple yang bernilai 1 pada posisi ke-i dan 0 selainnya, maka*

$$e_{in} = \begin{bmatrix} 0, 0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0 \end{bmatrix}^T.$$

Berdasarkan Definisi 3.5, matriks identitas dapat dituliskan sebagai

$$I_n = \begin{bmatrix} e_{1n} \; e_{2n} \; \cdots \; e_{nn} \end{bmatrix}.$$

Definisi 3.6. [9] *Suatu matriks vec-permutasi* P_{mn} *dinyatakan sebagai berikut*

$$P_{mn} = \begin{bmatrix} I_m \otimes e^T_{1n} \\ I_m \otimes e^T_{2n} \\ \vdots \\ I_m \otimes e^T_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mn \times mn}.$$

.

3.1. *Sifat-Sifat Operator Vec dan Operator Vech*

Teorema 3.7. [4] *Misalkan* $H \in \mathbb{C}^{\frac{1}{2}n(n+1)\times n^2}$ *dengan G merupakan transpos dari H dan* P_{nn} *merupakan matriks vec-permutasi, maka*

(1) $HG = I_{\frac{1}{2}n(n+1)}$.
(2) $H = (G^TG)^{-1}G^T$.
(3) $P_{nn}G = G$.
(4) $HP_{nn} = H$.

Teorema 3.8. [4] *Misalkan matriks simetri* $X = [x_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *dan* $H \in \mathbb{C}^{\frac{1}{2}n(n+1)\times n^2}$ *dengan G merupakan transpos dari H, maka*

(1) $\boldsymbol{vech}(X) = H\boldsymbol{vec}(X)$.
(2) $\boldsymbol{vec}(X) = G\boldsymbol{vech}(X)$.
(3) $\boldsymbol{vech}(X) = HG\boldsymbol{vech}(X)$.

3.2. *Operator Vec dengan Hasilkali Kronecker dan Matriks Vec-permutasi*

Teorema 3.9. [3] *Misalkan* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *dengan A nonsingular, maka*

$$\boldsymbol{vec}(A^{-1}) = ((A^{-1})^T \otimes A^{-1})\boldsymbol{vec}(A).$$

Bukti. Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dengan A nonsingular, akan ditunjukkan

$$\mathbf{vec}(A^{-1}) = ((A^{-1})^T \otimes A^{-1})\mathbf{vec}(A).$$

Perhatikan bahwa:

$$\begin{aligned}
\mathbf{vec}(A^{-1}) &= \mathbf{vec}((A^{-1}A)A^{-1}) \\
&= ((A^{-1})^T \otimes I_n)\mathbf{vec}(A^{-1}A) && (Teorema\ 3.2) \\
&= ((A^{-1})^T \otimes I_n)(I_n \otimes A^{-1})\mathbf{vec}(A) && (Teorema\ 3.2) \\
&= ((A^{-1})^T I_n) \otimes (I_n A^{-1})\mathbf{vec}(A) && (Teorema\ 2.11) \\
&= ((A^{-1})^T \otimes A^{-1})\mathbf{vec}(A),
\end{aligned}$$

Jadi, $\mathbf{vec}(A^{-1}) = ((A^{-1})^T \otimes A^{-1})\mathbf{vec}(A)$. □

Teorema 3.10. [4] *Misalkan matriks simetri* $X = [x_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$, *maka untuk* $X = X^T$ *berlaku*

$$\boldsymbol{vec}(X^T) = P_{nn}\boldsymbol{vec}(X) = \boldsymbol{vec}(X).$$

4. Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah dilakukan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut: Misalkan $X = [x_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ adalah matriks simetri dan $H \in \mathbb{C}^{\frac{1}{2}n(n+1)\times n^2}$, diperoleh:

(1) Misalkan G merupakan transpos dari H dan P_{nn} didefinisikan sebagai

$$P_{nn} = \begin{bmatrix} I_n \otimes e_{1n}^T \\ I_n \otimes e_{2n}^T \\ \vdots \\ I_n \otimes e_{nn}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{nn\times nn}.$$

maka

(a) $HG = I_{\frac{1}{2}n(n+1)}$.
(b) $H = (G^T\, G)^{-1}\, G^T$.
(c) $P_{nn}G = G$.
(d) $HP_{nn} = H$.

(2) Misalkan operator vec dan operator vech didefinisikan sebagai berikut

$$\mathbf{vech}(X) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \sqrt{2}x_{12} \\ \vdots \\ \sqrt{2}x_{1n} \\ x_{22} \\ \vdots \\ \sqrt{2}x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix} \quad dan \quad \mathbf{vec}(X) = \begin{bmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix},$$

maka sifat-sifat dari operator vec dan operator vech adalah

(a) $\mathbf{vech}(X) = H\mathbf{vec}(X)$.

(b) $\mathbf{vec}(X) = G\mathbf{vech}(X)$.
(c) $\mathbf{vech}(X) = HG\mathbf{vech}(X)$.

(3) Misalkan $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dengan A nonsingular, maka hubungan operator vec dengan hasilkali kronecker adalah

$$\mathbf{vec}(A^{-1}) = ((A^{-1})^T \otimes A^{-1})\mathbf{vec}(A) \ .$$

(4) Misalkan $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$, maka hubungan operator vec dengan matriks vec-permutasi adalah

$$\mathbf{vec}(X^T) = P_{nn}\mathbf{vec}(X) = \mathbf{vec}(X) \ .$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada bapak Mahdhivan Syafwan, bapak Admi Nazra dan bapak Zulakmal yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. dan Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer; edisi ke-8*. Erlangga, Jakarta.
[2] E. de Klerk. 2002. *Aspects of Semidefinite Programming*. Kluwer Academic, Amsterdam.
[3] Harville, D.A. 2008. *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. Springer, New York.
[4] Henderson, H. V. dan Searle, S. R. 1979. *Vec and Vech Operators for Matrices, with Some Uses in Jacobians and Multivariate Statistic*. Canad. J. Statist. 7, 65-81
[5] Laub, A. J. 2005. *Matrix Analysis for Scientist and Engineers*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Wasington, D.C.
[6] M.J. Todd, K.C. Toh dan R.H. Tutuncu. 1998. *On the NesterovTodd Direction in Semidefinite Programming*. SIAM J. Optim., 8-3:769796
[7] Noble, Ben and Daniel, J. W. 1998. *Applied Linier Algebra 3th Edition*. Prentice-Hall, New Jersey.
[8] Rao, C. R and Rao, M. B. 1998. *Matrix Algebra and Its Applications to Statistics and Econometrics*. World Scientific, Singapore.
[9] Zhang, H dan Ding F. 2013. On the kronecker product and their applications. *Journal of Applied Mathematics*. 296185 : 1 – 8