PELABELAN TOTAL SISI AJAIB SUPER PADA GRAF PRISMA BERCABANG $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$

KHAIRANNISA AL AZIZU

*Jurusan Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : khairannisa10@gmail.com*

Abstrak. Suatu pelabelan total sisi ajaib pada graf G dengan p merupakan banyak titik pada graf G dan q merupakan banyak sisi pada graf G adalah suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga $f(u) + f(v) + f(uv) = k$, untuk setiap $uv \in E(G)$ dengan k konstanta. f dikatakan sebuah pelabelan total sisi ajaib super dari graf G jika $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p\}$. Suatu graf prisma bercabang $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ merupakan suatu graf sederhana hasil korona dari graf prisma $C_5 \times P_2$ dengan komplemen graf lengkap $\overline{K}_2$. Terdapat pelabelan total sisi ajaib super pada graf prisma bercabang $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ dengan konstanta ajaib yang diperoleh yakni $k = 79$.

Kata Kunci: Pelabelan total sisi ajaib, Super, Graf Prisma Bercabang, Konstanta ajaib

1. Pendahuluan

Pelabelan merupakan suatu pemetaan satu-satu yang memetakan unsur himpunan titik dan unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Dalam [6], pelabelan yang banyak dibahas adalah pelabelan titik (*vertex labeling*) yang merupakan pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi (*edge labeling*) yang merupakan pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total (*total labeling*) yakni pelabelan dengan domain himpunan titik dan himpunan sisi. Pada pelabelan terdapat istilah bobot titik (*vertex weight*) yakni jumlah label titik dan label semua sisi yang terkait dengan titik tersebut. Untuk suatu sisi uv yang ada di graf tersebut, jumlah label sisi dan label dua titik yang menempel pada sisi disebut bobot sisi (*edge weight*) yang dinotasikan dengan $w(uv)$.

Kotzig dan Rosa telah memperkenalkan suatu konsep pelabelan ajaib dengan mendefinisikan suatu pelabelan total sisi ajaib dari graf G sebagai fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga untuk setiap sisi $uv \in E(G)$, bobot sisi $w(uv) = f(u) + f(uv) + f(v)$ adalah konstan [6]. Sugeng dkk [8] telah mengkaji sifat-sifat pelabelan total sisi ajaib super, salah satunya pada graf prisma diperumum (*prism graph*). Graf prisma diperumum $C_m \times P_r$ memuat pelabelan total sisi ajaib jika m ganjil, $m \geq 3$, dan $r \geq 2$.

Berdasarkan kajian tersebut, menarik jika dibuat suatu graf baru dari graf prisma $C_m \times P_2$ yang diberikan operasi korona dengan komplemen dari graf lengkap K_n yang dinotasikan dengan $\overline{K}_n$ dan didapatkan graf sederhana baru yakni graf

prisma yang memiliki cabang yang diberi nama graf prisma bercabang $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ [5]. Pada tulisan ini akan ditentukan pelabelan total sisi ajaib super pada graf prisma bercabang $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ [5] dan kemudian akan dicari konstanta ajaibnya.

2. Landasan Teori

2.1. Definisi dan Terminologi Graf

Jalan *walk* dari v_0 ke v_n di G adalah barisan hingga $v_0, e_{01}, v_1, \dots, v_{n-1}, e_{(n-1)n}, v_n$ dari titik dan sisi di G sehingga $e_{(i-1)i} = (v_{i-1}, v_i)$ untuk $i \geq 1$ adalah sisi di graf G . Pada jalan, tidak ada sisi yang muncul lebih dari satu kali, akan tetapi titik dapat muncul lebih dari satu kali. Jalan dapat dinotasikan dengan $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Lintasan *path* adalah jalan terbuka yang setiap titiknya berbeda, sedangkan graf **lingkaran** *circuit* adalah jalan tertutup yang semua titiknya berbeda. Graf G dikatakan **terhubung** jika untuk setiap dua titik di G ada lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut, jika tidak demikian maka graf G disebut graf tidak terhubung. Graf lengkap dengan n titik dilambangkan dengan K_n , $n \geq 1$. Banyaknya sisi pada graf lengkap dengan n titik adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Komplemen suatu graf G (dinotasikan $\overline{G}$) dengan n titik adalah suatu graf dengan himpunan titik $\overline{G}$ sama dengan himpunan titik G , yaitu $V(\overline{G}) = V(G)$ dan sisi-sisi $\overline{G}$ adalah komplemen sisi-sisi G terhadap graf lengkap K_n , yaitu $E(\overline{G}) = E(K_n) - E(G)$. Titik-titik yang dihubungkan dengan sisi dalam G tidak terhubung dalam G menjadi terhubung dalam $\overline{G}$.

2.2. Operasi Hasil Korona dan Hasil Kali Kartesius (cross) pada Graf

Misal terdapat dua graf G dan H dengan $V(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dan $V(H) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$. Misal terdapat graf H_i , dengan $V(H_i) = \{y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{im}\}$, dimana H_i adalah duplikat ke- i dari graf H . Maka graf $G \odot H$ mempunyai himpunan titik sebagai berikut.

$$V(G \odot H) = V(G) \cup \bigcup_{i=1}^n V(H_i),$$

dan mempunyai himpunan sisi sebagai berikut:

$$E(G \odot H) = E(G) \cup \bigcup_{i=1}^n E(H_i) \cup \{x_i y_{ij} \mid 1 \leq j \leq m, y_i \in V(H_i)\},$$

dengan H_i adalah duplikat dari H . Dapat dilihat bahwa :

$$|V(G \odot H)| = |V(G)| + |V(G)| \cdot |V(H)|,$$

$$|E(G \odot H)| = |E(G)| + |V(G)| \cdot |E(H)| + |V(G)| \cdot |V(H)|.$$

Perkalian kartesius dari graf $G_1 = (V_1, E_1)$ dan $G_2 = (V_2, E_2)$ adalah graf $G = (V, E)$, ditulis $G = G_1 \times G_2$. Jika $V = V_1 \times V_2$ dan dua titik $\langle u_1, u_2 \rangle$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle$ di G bertetangga jika dan hanya jika salah satu dari dua hal berikut berlaku $u_1 = v_1$ dan $u_2 v_2 \in E_2$ atau $u_2 = v_2$ dan $u_1 v_1 \in E_1$.

2.3. Graf Prisma Bercabang $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$

Diberikan suatu graf dari operasi hasil kali (*cross*) dari graf lingkaran (*circle*) yang memiliki m titik dengan graf lintasan (*path*) yang memiliki r titik yang dikenal dengan nama graf prisma yang disimbolkan dengan $C_m \times P_r$. Suatu graf prisma $C_5 \times P_2$ dapat dimodifikasi menjadi graf sederhana lainnya yang dinamakan graf prisma bercabang [5]. Graf prisma bercabang didapatkan dengan cara menambahkan operasi korona pada graf prisma $C_5 \times P_2$ dengan komplemen graf lengkap $\overline{K}_2$. Graf prisma bercabang mempunyai 5 sisi pada lingkaran di graf prisma dan 2 daun pada korona graf $C_5 \times P_2$ dengan komplemen graf lengkap $\overline{K}_2$ sehingga graf prisma bercabang dapat dinotasikan dengan $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$. Graf prisma bercabang tersebut memiliki $|V((C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2)| = 30$ dan $|E((C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2)| = 35$.

2.4. Pelabelan Total Sisi Ajaib Super pada Graf

Misalkan graf G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Suatu pelabelan total sisi ajaib pada graf G dengan p titik dan q sisi adalah suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p + q\}$ sedemikian sehingga $f(u) + f(v) + f(uv) = k$, untuk setiap $uv \in E(G)$ dengan k konstanta. f dikatakan sebuah pelabelan total sisi ajaib super dari graf G jika $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p\}$.

Teorema 2.1. [1] *Graf G merupakan sisi ajaib super jika dan hanya jika terdapat fungsi bijektif $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p\}$ dengan p merupakan jumlah titik pada graf G sedemikian sehingga himpunan $S = \{f(u) + f(v) | u, v \in E(G)\}$ terdiri dari q bilangan bulat berurutan, dimana q merupakan banyak sisi pada graf G . Dalam hal ini f dapat diperluas menjadi suatu pelabelan sisi ajaib super G dengan bilangan ajaib $k = p + q + s$ dengan $s = \min(S)$ dan $S = \{k - (p + 1), k - (p + 2), \dots, k - (p + q)\}$ dimana S merupakan hasil penjumlahan dua label titik yang berbeda dengan s merupakan minimum dari S .*

2.5. Pelabelan pada Graf Prisma Diperumum

Graf Prisma diperumum dapat didefinisikan dengan hasil kartesian $C_m \times P_r$ dari graf lingkaran dengan m titik dan graf lintasan dengan r titik. Misalkan

$$\begin{aligned} V(C_m \times P_r) &= \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, \text{ dan } 1 \leq j \leq r\}, \\ E(C_m \times P_r) &= \{v_{i,j}v_{i+1,j} \mid 1 \leq i \leq m-1 \text{ dan } 1 \leq j \leq r\} \cup \{v_{m,j}v_{1,j} \mid 1 \leq j \leq r\}, \\ &\quad \cup \{v_{i,j}v_{i,j+1} \mid 1 \leq i \leq m \text{ dan } 1 \leq j \leq r-1\}, \end{aligned}$$

Dengan demikian, $|V(C_m \times P_r)| = mr$ dan $|E(C_m \times P_r)| = m(2r - 1)$.

Lema 2.2. [1] *Graf Prisma diperumum $C_m \times P_r$ memiliki pelabelan sisi $(a, 1)$ -titik anti ajaib jika m bilangan ganjil, $m \geq 3$ dan $r \geq 2$.*

Teorema 2.3. [1] *Jika m ganjil dan $m \geq 3$, $r \geq 2$, maka graf prisma diperumum $C_m \times P_r$ memiliki pelabelan total sisi ajaib super.*

3. Pembahasan

Pada bab ini akan ditentukan pelabelan total sisi ajaib super pada graf prisma bercabang $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ dan akan ditentukan konstanta ajaibnya.

Berikut ini adalah hasil yang diperoleh:

Teorema 3.1. *Terdapat pelabelan total sisi ajaib super pada graf prisma bercabang $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ dengan konstanta ajaib $k = 79$.*

Bukti. Pada graf $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ diketahui $|V((C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2)| = 30$ dan $|E((C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2)| = 35$.

Didefinisikan suatu fungsi bijektif $f_1 : V((C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2) \cup E((C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2) \rightarrow \{1, 2, \dots, 75\}$ sebagai pelabelan titik dan sisi pada graf $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$.

Definisikan fungsi bijektif $f : V(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2 \rightarrow \{1, 2, \dots, 30\}$ dengan :

$$f(v_{1,i,j}) = \begin{cases} \frac{i+1}{2} + 5(j-1), & \text{untuk } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 5 \text{ dan } 1 \leq j \leq 2, \\ \frac{6+i}{2} + 5(j-1), & \text{untuk } i \text{ genap}, 2 \leq i \leq 4 \text{ dan } 1 \leq j \leq 2. \end{cases}$$

$$f(v_{1,i}) = \begin{cases} 10 + \frac{i}{2}, & \text{untuk } i \text{ genap}, 2 \leq i \leq 4, \\ 10 + \frac{5+i}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil}, 1 \leq i \leq 5. \end{cases}$$

$$f(v_{2,i}) = \begin{cases} 20, & \text{untuk } i = 1, \\ 15 + \frac{i-1}{2}, & \text{untuk } i \text{ ganjil}, 3 \leq i \leq 5, \\ 15 + \frac{4+i}{2}, & \text{untuk } i \text{ genap}, 2 \leq i \leq 4. \end{cases}$$

$$f(v_{2,i,j}) = \begin{cases} 22 + 5(j-1), & \text{untuk } i = 1 \text{ dan } 1 \leq j \leq 2, \\ 25 + 5(j-1), & \text{untuk } i = 2 \text{ dan } 1 \leq j \leq 2, \\ 21 + 5(j-1), & \text{untuk } i = 4 \text{ dan } 1 \leq j \leq 2, \\ 20 + \frac{3+i}{2} + 5(j-1), & \text{untuk } i \text{ ganjil}, 3 \leq i \leq 5 \text{ dan } 1 \leq j \leq 2. \end{cases}$$

Gambar 1. Graf $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$

Gambar 2. Pelabelan titik graf $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$

Misalkan $S = \{f(x) + f(y) | xy \in E((C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2)\}$ dimana x dan y merupakan titik di graf tersebut, maka didapat $S = \{14, 15, \dots, 48\}$. Anggota S membentuk barisan aritmatika yang memiliki beda 1 atau dengan kata lain anggota S membentuk barisan bilangan yang berurutan. Dikarenakan anggota S terdiri dari 35 buah bilangan bulat yang berurutan, dengan menggunakan Teorema 2.1, maka dapat dibuktikan graf $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ mempunyai Pelabelan total sisi ajaib super.

Didefinisikan pelabelan sisi graf $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ dengan $f(xy) = \{31, 32, \dots, 75\}$ dimana label $f(xy)$ diletakkan dari S yang paling besar hingga S yang paling kecil.

Dengan pelabelan yang telah diberikan, didapatkan pelabelan total sisi ajaib super dengan konstanta $k = \max(S) + \min(f(xy)) = 48 + 31 = 79$, maka graf $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ memiliki pelabelan total sisi ajaib super dengan konstanta ajaib $k = 79$. $\square$

4. Kesimpulan

Suatu pelabelan total sisi ajaib pada graf G dengan p merupakan banyak titik pada graf G dan q merupakan banyak sisi pada graf G adalah suatu fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p+q\}$ sedemikian sehingga $f(u) + f(v) + f(uv) = k$, untuk setiap $uv \in E(G)$ dengan k konstanta. f dikatakan sebuah pelabelan total sisi ajaib super dari graf G jika $f : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, p\}$.

Graf prisma bercabang $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ merupakan suatu graf sederhana hasil korona dari graf prisma $C_5 \times P_2$ dengan komplemen graf lengkap $\overline{K}_2$. Graf prisma bercabang $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ memiliki $|V((C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2)| = 30$ dan $|E((C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2)| = 35$.

Pada tulisan ini telah diperoleh bahwa terdapat pelabelan total sisi ajaib super pada graf prisma bercabang $(C_5 \times P_2) \odot \overline{K}_2$ dengan konstanta ajaib yang diperoleh yakni $k = 79$.

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Syafrizal Sy dan Ibu Dr. Lyra Yulianti selaku pembimbing dalam mengerjakan penelitian ini. Juga kepada Ibu Dr. Des Welyyanti, Ibu Izzati Rahmi HG, M.Si dan Bapak Zulakmal, M.Si selaku penguji sehingga penelitian ini dapat terlaksana dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Baca, M. dan Miller, M. 2008. *Super Edge-Antimagic Graph : A Wealth of Problems and Some Solutions*. Brown Walker Press, USA.
- [2] Bartle, R.G and Sherbert, D.R. 2000. *Introduction to Real Analysis* . John Wiley and Sons Inc, USA.
- [3] Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application*.The Macmillan Press LTD, London.
- [4] Chartrand, G dan Zhang, P. 2005. *Introduction to Graph Theory*. Mc Graw-Hill Press, Boston.
- [5] Fahrurrozi, A., dkk. 2014. *Pelabelan Total Super (a,d) Busur Anti Ajaib pada graf Prisma Bercabang*. Thesis S-2 Universitas Indonesia,Depok. (tidak dipublikasikan)
- [6] Gallian, J.A. 2016. *A Dynamic Survey of Graph Labelling*. <http://www.combinatorics.org>. Diakses pada 1 September 2017 Pukul 13.30.
- [7] Martono, K. 1986. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik, Matematika Untuk Universitas*. Angkasa, Bandung.
- [8] Sugeng, K.A. 2005. *Magic and Antimagic Labelling of Graph*. Disertasi S-3 Universitas Ballarat, Australia.
- [9] West, D.B. 1996. *Introduction to Graph Theory*. Prentice-Hall, USA.