Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **1** Hal. 136 – 142
ISSN : 2303–291X

RAINBOW CONNECTION NUMBER DAN *STRONG RAINBOW CONNECTION NUMBER* PADA GRAF TANGGA SEGITIGA YANG DIPERUMUM

SHELLI FITRIANDA, LYRA YULIANTI, NARWEN
Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : shellifitrianda@gmail.com

Abstrak. Misalkan G adalah graf terhubung tak *trivial* dengan pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$, untuk sisi dari G, dimana sisi yang bertetangga boleh diberi warna yang sama. Misal terdapat titik u dan v di G, sebuah lintasan P di G adalah *rainbow path* jika tidak ada dua sisi dari titik u dan v di P memiliki warna yang sama. Graf G adalah *rainbow connected* dengan pewarnaan c jika G memiliki *rainbow path* untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$. *Rainbow connection number* dari graf terhubung dinotasikan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected.*

Untuk dua titik u dan v dari G, sebuah *rainbow geodesic* (u, v) di G adalah *rainbow path* (u, v) dengan panjang $d(u, v)$ dimana $d(u, v)$ adalah jarak diantara u dan v (panjang *path* (u, v) terpendek di G). Graf G adalah *strongly rainbow connected* jika G memiliki sebuah *rainbow geodesic* (u, v) untuk setiap dua titik u dan v di G. Minimum k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$ dari sisi G sedemikian sehingga G *strongly rainbow connected* dinamakan *strong rainbow connection number*, $src(G)$. Pada tulisan ini akan dibahas *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf tangga segitiga yang diperumum Tr_4.

Kata Kunci: Rainbow connection number, Strong rainbow connection number, graf tangga segitiga yang diperumum

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu dari matematika yang sudah ada sejak lebih dari dua ratus tahun yang lalu. Paper pertama tentang teori graf muncul pada tahun 1736, oleh matematikawan terkenal dari Swiss bernama Leonhard Euler [1]. Saat ini teori graf semakin berkembang pesat karena aplikasinya yang sangat luas dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam berbagai bidang ilmu. Salah satu topik dalam teori graf adalah *rainbow connection* pada graf.

Konsep *rainbow connection number* pada graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand, dkk pada tahun 2006 [2]. Misalkan G adalah graf terhubung tak *trivial* dan didefinisikan pewarnaan sisi $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$, dengan $k \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga dua sisi yang bertetangga boleh memiliki warna yang sama. Suatu (u, v)-*path* P di G dikatakan *rainbow path* jika tidak ada dua sisi dalam lintasan tersebut memiliki warna yang sama. Graf G dikatakan *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path.*

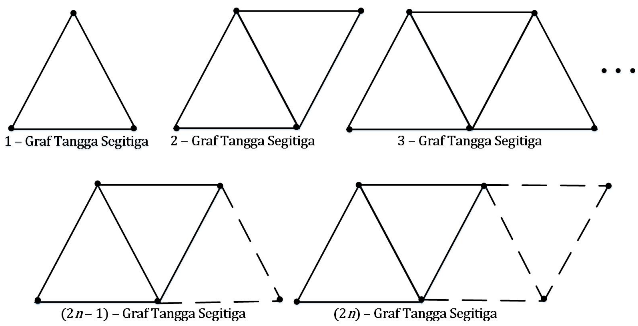
Konsep *rainbow connection number* dapat digunakan untuk pengamanan pengiriman informasi rahasia antar pemerintah dan agen [6]. Dalam hal ini, pemerintah dan agen tidak diizinkan untuk saling mencek informasi karena berhubungan dengan keamanan nasional, sehingga informasi kepada agen satu dan lainnya harus menggunakan sandi. Dengan demikian, akan terdapat satu atau lebih lintasan informasi untuk setiap dua agen dan harus dipastikan tidak ada sandi yang berulang. Kata sandi setiap lintasan harus berbeda, sehingga harus ditentukan jumlah sandi yang dibutuhkan, agar terdapat satu lintasan yang aman antara dua agen. Situasi inilah yang dimodelkan dalam *rainbow connection number*.

Penelitian terkait *rainbow connection* berkembang cukup pesat, dapat dilihat pada [3], [5], [6], [7], [8], [9], dan [10]. Untuk itu akan dibahas *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* pada graf tangga segitiga yang diperumum.

2. Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

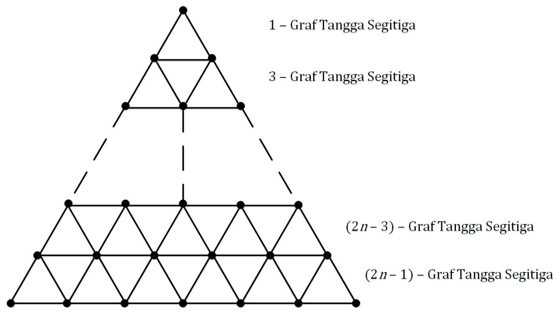
2.1. *Graf Tangga Segitiga yang Diperumum*

Definisi dan terminologi yang digunakan dalam tulisan ini diambil dari [1] dan [2]. Graf tangga segitiga yang diperumum dapat diperoleh dari beberapa graf dengan cara sebagai berikut. Dua segitiga dikatakan terhubung jika beririsan pada satu sisi. Misalkan T adalah kumpulan segitiga-segitiga terhubung, maka T adalah graf planar terhubung dengan siklus terpendek 3 dan masing-masing segitiga beririsan pada paling sedikit satu sisi dengan lainnya. Kumpulan segitiga terhubung disebut *triomino*. Jadi, T disebut n - *triomino* jika T adalah susunan dari n segitiga yang terhubung. Graf tangga segitiga dengan panjang n adalah n - *triomino* yang disusun secara mendatar, dengan menempatkan n segitiga dengan cara seperti pada Gambar 1 [3], yang dinotasikan dengan n-graf tangga segitiga.



Gambar 1. Graf Tangga Segitiga, $n \geq 1$.

Graf piramida dengan n baris, ditulis Pr_n adalah graf yang dibentuk dengan menempatkan graf tangga segitiga dengan cara sebagai berikut. Pertama-tama terdapat $(2n-1)$-graf tangga segitiga, kemudian diletakkan $(2n-3)$-graf tangga segitiga diatasnya, seterusnya hingga di bagian puncak terdapat 1-graf tangga segitiga seperti pada Gambar 2 [4]. Dapat dilihat bahwa terdapat n baris pada graf tersebut. Titik paling atas dari graf piramida dinamakan sebagai titik puncak dan titik paling bawah dari graf piramida dinamakan sebagai titik-titik bawah.



Gambar 2. Graf Piramida dengan n baris.

Berdasarkan Gambar 2, dengan menambahkan satu titik dibawah graf piramida, dinamakan titik dasar (titik utama) dan sebanyak n sisi tertentu yang menghubungkan titik dasar dengan titik-titik bawah pada graf piramida, maka diperoleh graf tangga segitiga yang diperumum yang dinotasikan sebagai Tr_n, untuk $n \geq 2$, dengan n merupakan banyaknya sisi yang terkait dengan titik utama dan banyaknya tingkat pada graf tangga segitiga yang diperumum tersebut.

Dengan demikian diperoleh bentuk umum dari graf tangga segitiga yang diperumum adalah sebagai berikut :

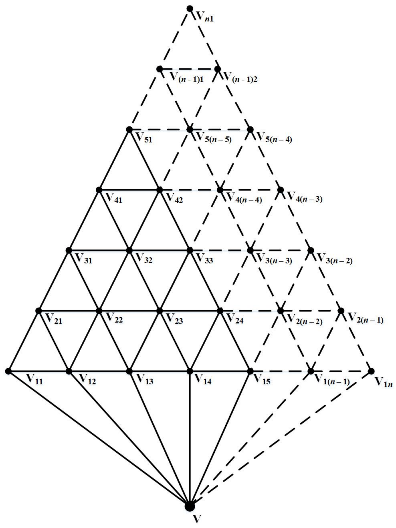
$$\begin{aligned}
V(Tr_n) &= \{v\} \cup \{v_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n-i+1\}, \text{dan} \\
E(Tr_n) &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4, \text{dengan} \\
E_1(Tr_n) &= \{vv_{1j} | 1 \leq i \leq n\}, \\
E_2(Tr_n) &= \{v_{ij}v_{i(j+1)} | 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-i\}, \\
E_3(Tr_n) &= \{v_{ij}v_{(i+1)j} | 1 \leq i \leq n-j, 1 \leq j \leq n-1\}, \\
E_4(Tr_n) &= \{v_{ij}v_{i+1(j-1)} | 1 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq n-i+1\}.
\end{aligned}$$

Pada Gambar 3 diberikan contoh untuk graf tangga segitiga yang diperumum (Tr_n).

2.2. *Rainbow Connection Number dan Strong Rainbow Connection Number*

Lintasan *geodesic* antara titik u dan v dari graf G adalah lintasan $u - v$ dengan panjang minimum. Panjang lintasan adalah jumlah sisi yang terdapat di dalam lintasan. Jarak antara u dan v adalah panjang lintasan terpendek dari u dan v yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Diameter adalah jarak maksimum dari sebarang dua titik di G, dinotasikan dengan $diam(G)$.

Misal terdapat titik u dan v di G, sebuah lintasan P di G adalah *rainbow path* jika tidak ada dua sisi dari titik u dan v di P memiliki warna yang sama.



Gambar 3. Graf Tangga Segitiga yang Diperumum Tr_n, $n \geq 2$.

Graf G adalah *rainbow connected* dengan pewarnaan c jika G memiliki *rainbow path* untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$. Pewarnaan c dikatakan sebuah *rainbow coloring* dari G. Jika k warna digunakan maka c adalah *rainbow k-coloring. Rainbow connection number* dari graf terhubung dinotasikan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimum yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected.*

Untuk dua titik u dan v dari G, sebuah *rainbow geodesic*-(u, v) di G adalah *rainbow path*-(u, v) dengan panjang $d(u, v)$ dimana $d(u, v)$ adalah jarak diantara u dan v (panjang *path*-(u, v) terpendek di G). Graf G adalah *strongly rainbow connected* jika G memiliki sebuah *rainbow geodesic*-(u, v) untuk setiap dua titik $u, v \in V(G)$. Dalam kasus ini, pewarnaan c dikatakan sebuah *strong rainbow coloring* dari G. Minimum k yang terdapat pada pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \cdots, k\}$ dari sisi G sedemikian sehingga G adalah *strongly rainbow-connected* adalah *strong rainbow connection number*, $src(G)$ dari G.

Chartrand dkk. (2006) telah memberikan teorema dasar *rainbow connection number* suatu graf, seperti dituliskan pada Teorema 2.1 dan Teorema 2.2 berikut.

Teorema 2.1. [2] *Jika G adalah graf tak* trivial *terhubung berukuran m yang mempunyai diameter $diam(G)$, maka*

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $diam(G) \leq rc(G)$. Perhatikan bahwa $diam(G) = \max\{d(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$. Karena $rc(G)$ berlaku pada lintasan sebarang yang menghubungkan u ke v dimana $u, v \in V(G)$, maka berdasarkan definisi diameter G, $diam(G) \leq rc(G)$. Misalkan P_g adalah lintasan *geodesic* yang menghubungkan sebarang dua titik u ke v di G dengan $d(u, v) = s$ dan P adalah lintasan sebarang yang menghubungkan u ke v dengan panjang lintasan adalah t. Karena jarak adalah banyak sisi pada lintasan *geodesic*, maka $s \leq t$. Perhatikan bahwa $rc(G)$ berlaku pada lintasan sebarang dari u ke v dimana $u, v \in V(G)$. Akibatnya $rc(G) \leq src(G)$ untuk setiap graf terhubung G. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $src(G) \leq m$. Karena m adalah banyak sisi pada G, jelas bahwa $src(G) \leq m$. □

Teorema 2.2. [2] *Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial yang berukuran m, maka:*

(a) $rc(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap,
(b) $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$,
(c) $rc(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon.

Bukti.

(a) Jika G adalah graf lengkap, maka pewarnaan yang memberikan warna 1 untuk setiap sisi di G adalah *strong rainbow* 1-*coloring* dari G dan juga $rc(G) = src(G) = 1$. Di sisi lain, jika G adalah bukan graf lengkap, maka G mengandung paling sedikit dua titik yang tidak bertetangga, namakan u dan v, sedemikian sehingga setiap lintasan geodesic-(u, v) di G mempunyai panjang minimal 2, jadi $src(G) \geq 2$.
(b) Misalkan $rc(G) = 2$ maka haruslah $src(G) geq 2$. Karena $rc(G) = 2$, berarti G memiliki *rainbow* 2-*coloring*, yang mengakibatkan setiap dua titik yang tidak bertetangga terhubung oleh suatu *rainbow path* dengan panjang 2. Karena lintasan tersebut adalah lintasan *geodesic*, maka tidak mungkin $src(G) > 2$. Maka haruslah $src(G) = 2$. Di sisi lain, asumsikan $src(G) = 2$. Berdasarkan (a) haruslah $rc(G) \leq 2$. Karena G bukan graf lengkap, maka haruslah $rc(G) = 2$.
(c) Andaikan G bukan graf pohon. Maka G memiliki suatu *cycle* $C : v_1, v_2, \cdots, v_k, v_1$ dimana $k \geq 3$. Berikan $(m-1)$-*coloring* terhadap sisi-sisi di G, yaitu dengan memberikan warna 1 untuk sisi v_1v_2 dan v_2v_3, serta $(m-2)$ buah warna berbeda dari himpunan warna $\{2, 3, \cdots, m-1\}$ untuk $m-2$ sisi tersisa di G. Pewarnaan ini adalah *rainbow coloring*. Jadi, $rc(G) \leq m-1$. Selanjutnya, misalkan G adalah graf pohon dengan ukuran m. Asumsikan bahwa $rc(G) \leq m-1$. Misalkan c adalah suatu *minimum rainbow coloring* di G. Maka terdapat sisi e dan f sehingga $c(e) = c(f)$. Asumsikan, tanpa mengurangi perumuman, bahwa $e = uv$ dan $f = xy$ dan G memiliki suatu (u, v)-path, yaitu $u, v, \cdots, x, y$. Maka tidak terdapat *rainbow path*-(u, v) di G. Ini kontradiksi dengan G adalah *rainbow connected*. Jadi, haruslah G adalah graf pohon dengan ukuran m. □

3. *Rainbow Connection Number* dan *Strong Rainbow Connection Number* pada Graf Tangga Segitiga yang Diperumum

Diameter dari graf tangga segitiga yang diperumum untuk $n = 4$ diperoleh dengan menghitung jarak dari titik dasar ke titik puncak. Panjang lintasan terpendek dari titik dasar ke titik puncak adalah 4. Sehingga diperoleh bahwa diameter dari graf tangga segitiga yang diperumum untuk $n = 4$ adalah

$$diam(Tr_4) = 4.$$

Teorema 3.1. $\diamondsuit$ *Rainbow connection number untuk graf tangga segitiga yang diperumum untuk* $n = 4$*,* Tr_4 *adalah*

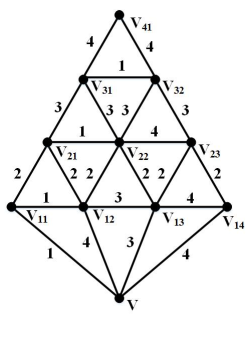
$$rc(Tr_4) = 4.$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.1 dan $diam(Tr_4) = 4$, maka $4 \leq rc(Tr_4)$.

Akan ditunjukkan bahwa $rc(Tr_4) \leq 4$. Didefinisikan pewarnaan $c : E(Tr_n) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c(vv_{11}) &= 1, \\ c(vv_{1j}) &= 4 - k, \text{untuk } k = j - 2,\ 2 \leq j \leq 4 - 1, \\ c(vv_{14}) &= 4, \\ c(v_{ij}v_{(i+1)j}) &= i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq 4 - j,\ 1 \leq j \leq 4 - 1, \\ c(v_{ij}v_{(i+1)(j-1)}) &= i + 1, \text{untuk } 1 \leq i \leq 4 - 1,\ 2 \leq j \leq 4 - i + 1, \\ c(v_{ij}v_{i(j+1)}) &= [1, 4] - \bigcup_{i=1}^{4} c(v_{i1}v_{(i+1)1}) \text{untuk } 1 \leq i \leq 4 - 1,\ 1 \leq j \leq 4 - i, \end{aligned}$$

dimana notasi $[1, 4]$ menyatakan bilangan bulat dari 1 sampai 4.



Gambar 4. Graf Tr_4

Pada pewarnaan tersebut, dapat dilihat bahwa untuk setiap dua titik u dan v di Tr_4, terdapat lintasan rainbow di antara keduanya. Sehingga diperoleh bahwa $rc(Tr_4) = 4$. $\square$

Teorema 3.2. $\diamondsuit$ *Strong rainbow connection number untuk graf tangga segitiga yang diperumum untuk* $n = 4$*,* Tr_4 *adalah*

$$src(Tr_4) = rc(Tr_4) = 4.$$

Bukti. Berdasarkan Teorema 2.1, jelas bahwa $src(Tr_4) \geq rc(Tr_4)$, sehingga diperoleh bahwa $src(Tr_4) \geq 4$. Selanjutnya, dengan pewarnaan yang sama seperti pada pembuktian Teorema 3.1, dapat dilihat bahwa pewarnaan tersebut adalah *strong rainbow coloring*, karena untuk setiap dua titik u, v di Tr_4, lintasan *rainbow* di antara kedua titik tersebut adalah lintasan geodesic. Jadi, $src(Tr_4) \leq 4$. □

4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah diperoleh *rainbow connection number* dan *strong rainbow connection number* untuk graf tangga segitiga yang diperumum untuk $n = 4$, yang dinotasikan dengan Tr_4, dimana diperoleh bahwa

$$rc(Tr_4) = src(Tr_4) = 4.$$

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada bapak Dr. Mahdhivan Syafwan, bapak Dr. Dodi Devianto, dan bapak Syafruddin M.Si selaku dosen penguji, yang telah memberikan kritik dan saran dalam penulisan makalah ini.

Daftar Pustaka

[1] Bondy, J. A. and U. S. R Murty. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London
[2] Chartrand, G., Kalamazoo, G. L. Johns, S Valley, and K. A McKeon. 2008. Rainbow connection in graph. *Mathematica Bohemica*, **133** (1) : 85 – 89
[3] Shulhany, M.A dan A. N. M Salman. 2015. Bilangan terhubung pelangi graf berlian. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Mate-matika UMS 2015*. **1** : 916 – 924
[4] Yanti, Helma. 2014. Analisis Graf Piramida, Graf Berlian, dan Graf Bintang Sebagai Graf Perfect. *Tesis S-2, unpublished*. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
[5] Arnasyitha, Yulianti dan Dafik. 2014. Rainbow connection number pada operasi graf. *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014*. **1**(1): 83 – 87
[6] Mahmudah, Muhlisatul dan Dafik. 2014. Rainbow connection hasil operasi graf. *Prosiding Seminar Nasional Matematika 2014*. **1**(1): 174 – 183
[7] Sy. Syafrizal, G.H. Medika, L. Yulianti. 2013. The rainbow connection of fan and sun. *Applied Mathematical Sciences*. **7**(64) : 3155 – 3159
[8] X. Li dan Y. Shi. 2010. Rainbow connection in 3 - connected graphs. *Graphs and Combinatorics*. **29**(5) : 1471 – 1475
[9] X. Li dan Y. Sun. 2010. Rainbow connection numbers of complementary graphs. *Utilitas Math*. **86**(2011) : 23 – 32
[10] X. Li dan Y. Sun. 2011. Rainbow connection of graphs - a survey. *Graphs and Combinatorics*. **29**(1)(2013) : 1 – 38