

DIMENSI METRIK DAN DIMENSI PARTISI DARI GRAF TANGGA SEGITIGA TR_n UNTUK $n = 2, 3$

FEBRIA ANGRAINI, DES WELYYANTI, SYAFRUDDIN

*Jurusan Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus Unand Limau Manis, Padang, Indonesia
 email : febriaangraini@gmail.com*

Abstrak. Dimensi metrik dari graf G adalah kardinalitas minimum dari himpunan penyelesaian. W yang merupakan himpunan bagian dari $V(G)$ dikatakan himpunan penyelesaian jika representasi setiap titik di G terhadap W berbeda. Selanjutnya, dimensi partisi dari graf G adalah kardinalitas minimum dari partisi pembeda. Π yang merupakan himpunan terurut k -partisi dari $V(G)$ dikatakan partisi pembeda jika representasi setiap titik di G terhadap Π berbeda. Pada tulisan ini akan ditentukan dimensi metrik dan dimensi partisi dari graf tangga segitiga Tr_n untuk $n = 2, 3$.

Kata Kunci: Dimensi metrik, Dimensi partisi, Graf tangga segitiga

1. Pendahuluan

Dimensi metrik diperkenalkan oleh Harary dan Melter [1]. Misalkan terdapat graf terhubung G . Misalkan u dan v adalah titik-titik dari graf G . Jarak antara u dan v , dinotasikan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek antara kedua titik tersebut di G . Misalkan terdapat himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subset V(G)$. Representasi titik v terhadap W didefinisikan sebagai jarak dari v ke tiap-tiap elemen di W , ditulis

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)).$$

Himpunan W dinamakan himpunan penyelesaian untuk G jika $r(u|W) = r(v|W)$ maka $u = v$ untuk setiap dua titik u dan v di G . Kardinalitas minimum dari himpunan penyelesaian dinamakan dimensi metrik dari G , dinotasikan $\dim(G)$ [3]. Dimensi metrik dapat digunakan untuk pembahasan pada bidang lain seperti kimia, navigasi robot dan optimasi kombinasi.

Berikut penjelasan dimensi partisi suatu graf G , dinotasikan $pd(G)$. Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf dan $S \subseteq V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S , dinotasikan dengan $d(v, S)$, adalah $\min \{d(v, x), x \in S\}$ dengan $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x . Definisikan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ sebagai himpunan yang berisikan k -partisi tersebut. Misal terdapat titik $v \in V(G)$, maka representasi dari v terhadap Π didefinisikan dengan $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), \dots, d(v, S_k))$. Jika setiap titik di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π , maka Π disebut partisi pembeda (*resolving partition*). Kardinalitas minimum dari partisi pembeda disebut dimensi partisi dari G , ditulis $pd(G)$ [2].

Setelah ditentukan dimensi metrik dari suatu graf, kita dapat menentukan dimensi partisi dari graf tersebut menggunakan teorema tentang hubungan dimensi partisi dengan dimensi metrik. Chartrand [2] telah membahas hubungan dimensi partisi dan dimensi metrik, yaitu $pd(G) \leq \dim(G) + 1$.

2. Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi

Definisi 2.1. [3] Misalkan terdapat graf terhubung G . Misalkan u dan v adalah titik-titik dari graf G . Jarak antara u dan v , dinotasikan $d(u, v)$, adalah panjang lintasan terpendek antara kedua titik tersebut di G . Misalkan terdapat himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, \dots, w_k\} \subset V(G)$. **Representasi** titik v terhadap W didefinisikan sebagai jarak dari v ke tiap-tiap elemen di W , ditulis

$$r(v|W) = (d(v, w_1), d(v, w_2), \dots, d(v, w_k)).$$

Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap W , maka W disebut sebagai **himpunan penyelesaian**. Kardinalitas minimum dari himpunan penyelesaian disebut **dimensi metrik** dari G , dinotasikan dengan $\dim(G)$.

Teorema 2.2. [3] Misalkan G adalah graf terhubung dengan banyak titik n . $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G \simeq P_n$ dengan $n \geq 2$.

Definisi 2.3. [2] Misalkan G adalah suatu graf terhubung. Himpunan titik $V(G)$ dipartisi menjadi beberapa partisi, sebut $S_1, S_2, \dots, S_k$. Notasikan Π sebagai suatu himpunan terurut dari k -partisi, tulis $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$. Misalkan terdapat sebuah titik v di G , maka **representasi** v terhadap Π didefinisikan sebagai jarak dari v ke tiap-tiap partisi di Π , ditulis

$$r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)).$$

Jika setiap titik yang berbeda di G mempunyai representasi yang berbeda terhadap Π , maka Π disebut sebagai **partisi pembeda**. Kardinalitas minimum dari partisi pembeda terhadap $V(G)$ disebut **dimensi partisi** dari G , dinotasikan dengan $pd(G)$.

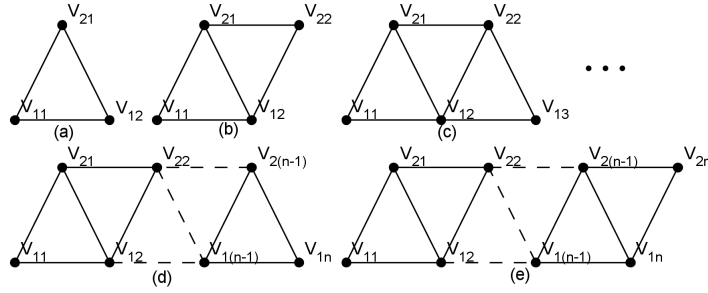
Teorema 2.4. [2] Misalkan G suatu graf terhubung dengan orde $n \geq 2$. Dimensi partisi dari G , $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika $G \simeq P_n$.

Teorema 2.5. [2] Jika G adalah graf terhubung tidak trivial, maka $pd(G) \leq \dim(G) + 1$.

3. Graf Tangga Segitiga yang Diperumum

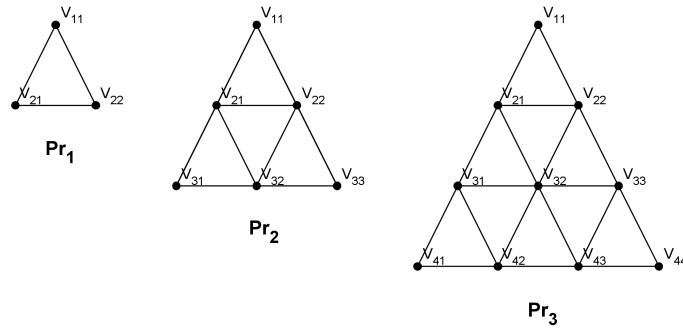
Fitrianda [7] mengkonstruksi graf tangga segitiga yang diperumum dari beberapa graf dengan cara sebagai berikut. Dua segitiga dikatakan terhubung jika beririsan pada satu sisi. Misalkan T adalah kumpulan segitiga-segitiga terhubung, maka T adalah graf planar terhubung dengan siklus terpendek 3 dan masing-masing segitiga beririsan pada paling sedikit satu sisi dengan lainnya. Kumpulan segitiga terhubung disebut *triomino*. Jadi, T disebut *n-triomino* jika T adalah susunan dari n segitiga

yang terhubung. Graf tangga segitiga dengan panjang n adalah n -triomino yang disusun secara mendatar, dengan menempatkan n segitiga dengan cara seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. (a) 1-Graf Tangga Segitiga, (b) 2-Graf Tangga Segitiga, (c) 3-Graf Tangga Segitiga, (d) $(2n-1)$ -Graf Tangga Segitiga, (e) $2n$ -Graf Tangga Segitiga

Graf piramida dengan tinggi n , $n \geq 1$ ditulis Pr_n merupakan graf yang dibentuk dengan cara berikut. Graf Pr_1 terdiri dari 1-graf tangga segitiga, dengan banyak titik Pr_1 adalah 3. Graf Pr_2 terdiri dari 1-graf tangga segitiga dan 3-graf tangga segitiga, dengan banyak titik Pr_2 adalah 6. Graf Pr_3 terdiri dari 1-graf tangga segitiga, 3-graf tangga segitiga dan 5-graf tangga segitiga, dengan banyak titik Pr_3 adalah 10.



Gambar 2. Graf Piramida Pr_n , $n = 1, 2, 3$

Graf Piramida Pr_n dengan

$$V(Pr_n) = \{v_{ij} | i = 1, 2, 3, \dots, n+1, j = 1, 2, 3, \dots, i\},$$

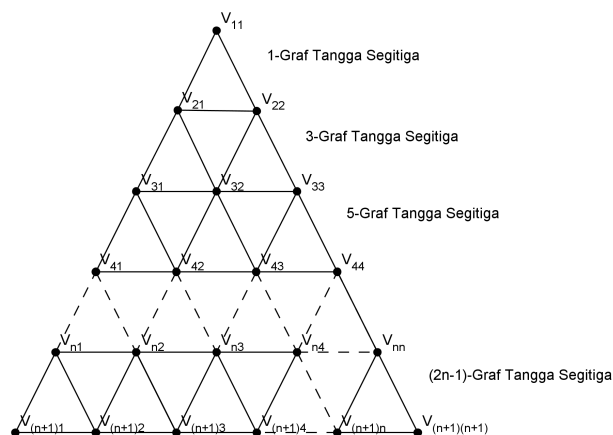
$$E(Pr_n) = E_1 \cup E_2 \cup E_3, \text{ dengan}$$

$$E_1 = \{v_{(i+1)j}v_{(i+1)(j+1)} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i\},$$

$$E_2 = \{v_{ij}v_{(i+1)j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i\},$$

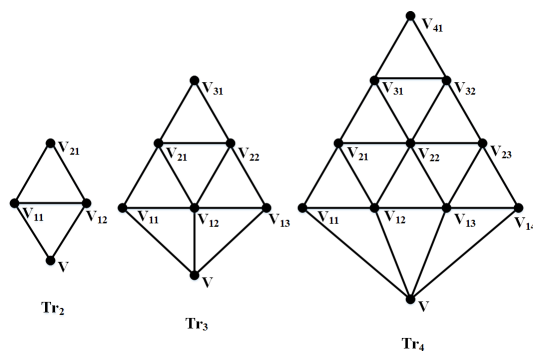
$$E_3 = \{v_{ij}v_{(i+1)(j+1)} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq i\}.$$

Graf Pr_n terdiri dari 1-graf tangga segitiga, 3-graf tangga segitiga, 5-graf tangga segitiga, $\dots$, dan $(2n - 1)$ -graf tangga segitiga, dengan banyak titik Pr_n adalah $\frac{1}{2}(n + 1)(n + 2)$ [6].



Gambar 3. Graf Piramida dengan tinggi n

Berdasarkan definisi graf piramida tersebut, dengan menambahkan satu titik yaitu titik v (dinamakan titik dasar / titik utama) dibawah graf piramida, lalu mengaitkan titik v tersebut pada semua titik paling bawah dari graf piramida, diperoleh graf tangga segitiga yang diperumum yang didefinisikan sebagai Tr_n dengan $n \geq 2$ [7]. Dengan n merupakan banyak sisi yang terkait dengan titik utama dan banyaknya tingkat pada graf tangga segitiga yang diperumum.

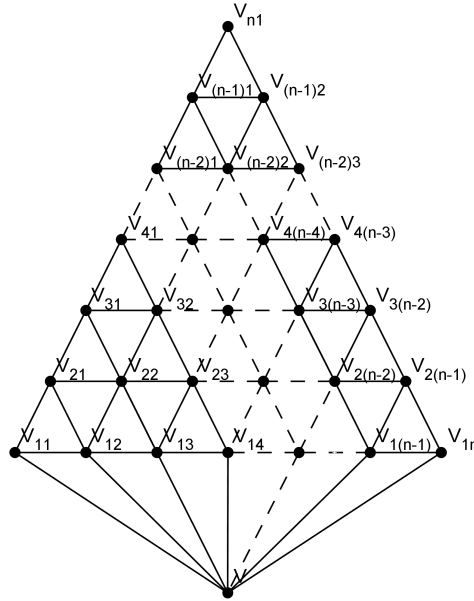


Gambar 4. Graf Tangga Segitiga yang Diperumum Tr_n , $n = 2, 3, 4$

Berdasarkan Gambar 4, $n = 2$ menyatakan graf tangga segitiga yang diper-

umum dengan 2 sisi yang terkait dengan titik utama dan memiliki 2 tingkat. Untuk $n = 3$ menyatakan graf tangga segitiga yang diperumum dengan 3 sisi yang terkait dengan titik utama dan memiliki 3 tingkat. Untuk $n = 4$ menyatakan graf tangga segitiga yang diperumum dengan 4 sisi yang terkait dengan titik utama dan memiliki 4 tingkat. Sehingga, diperoleh bentuk umum dari graf tangga segitiga yang diperumum adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 V(Tr_n) &= \{v\} \cup \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - i + 1\}, \\
 E(Tr_n) &= E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4, \text{ dengan} \\
 &, E_1 = \{vv_{1j} \mid 1 \leq j \leq n\}, \\
 E_2 &= \{v_{ij}v_{i(j+1)} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - i\}, \\
 E_3 &= \{v_{ij}v_{(i+1)j} \mid 1 \leq i \leq n - j, 1 \leq j \leq n - 1\}, \\
 E_4 &= \{v_{ij}v_{i+1(j-1)} \mid 1 \leq i \leq n - 1, 2 \leq j \leq n - i + 1\}.
 \end{aligned}$$



Gambar 5. Graf Tangga Segitiga yang Diperumum Tr_n , $n \geq 2$

4. Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Graf Tangga Segitiga yang Diperumum

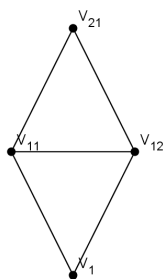
Teorema 4.1. $\diamond$ Misalkan Tr_n adalah graf tangga segitiga yang diperumum, maka $\dim(Tr_n) = 2$ untuk $n = 2, 3$.

Bukti. Misalkan $G = Tr_n$ dengan $V(Tr_n) = \{v\} \cup \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - i + 1\}$. Akan ditunjukkan $\dim(Tr_n) = 2$. Karena graf $Tr_n \not\cong P_n$ maka

berdasarkan Teorema 2.1, diperoleh bahwa $\dim(Tr_n) \geq 2$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $\dim(Tr_n) \leq 2$. Misalkan $W = \{v, v_{11}\}$.

Kasus 1. $n = 2$

Misalkan himpunan titik $V(Tr_2) = \{v, v_{11}, v_{12}, v_{21}\}$.



Gambar 6. Graf Tr_2

Dari Gambar 6 diperoleh representasi semua titik pada graf Tr_2 terhadap W adalah

$$r(v|W) = (d(v, v), d(v, v_{11})) = (0, 1)$$

$$r(v_{11}|W) = (d(v_{11}, v), d(v_{11}, v_{11})) = (1, 0)$$

$$r(v_{12}|W) = (d(v_{12}, v), d(v_{12}, v_{11})) = (1, 1)$$

$$r(v_{21}|W) = (d(v_{21}, v), d(v_{21}, v_{11})) = (2, 1)$$

Karena representasi setiap titik di graf Tr_2 berbeda, maka $\dim(Tr_2) \leq 2$.

Kasus 2. $n = 3$

Misalkan himpunan titik $V(Tr_3) = \{v, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{21}, v_{22}, v_{31}\}$.

Representasi titik-titik v, v_{11}, v_{12} , dan v_{21} dapat dilihat pada Kasus 1. Selanjutnya, representasi titik-titik v_{13}, v_{22} dan v_{31} adalah

$$r(v_{13}|W) = (d(v_{13}, v), d(v_{13}, v_{11})) = (1, 2)$$

$$r(v_{22}|W) = (d(v_{22}, v), d(v_{22}, v_{11})) = (2, 2)$$

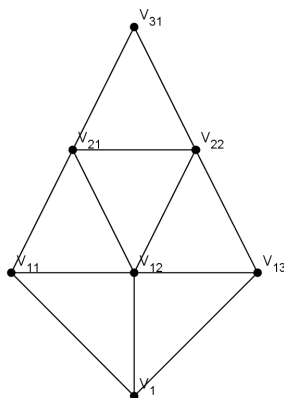
$$r(v_{31}|W) = (d(v_{31}, v), d(v_{31}, v_{11})) = (3, 2)$$

Karena representasi setiap titik di graf Tr_3 berbeda, maka $\dim(Tr_3) \leq 2$.

Dari Kasus 1 dan Kasus 2 diperoleh $\dim(Tr_n) \leq 2$. Karena $\dim(Tr_n) \geq 2$ dan $\dim(Tr_n) \leq 2$, maka $\dim(Tr_n) = 2$, untuk $n = 2, 3$. $\square$

Teorema 4.2. $\diamond$ Misalkan Tr_n adalah graf tangga segitiga yang diperumum, maka $pd(Tr_n) = 3$ untuk $n = 2, 3$.

Bukti. Misalkan $G = Tr_n$ dengan $V(Tr_n) = \{v\} \cup \{v_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n - i + 1\}$. Akan ditunjukkan $pd(Tr_n) = 3$. Karena graf $Tr_n \not\cong P_n$ maka berdasarkan Teorema 2.2, diperoleh bahwa $pd(Tr_n) \geq 3$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $pd(Tr_n) \leq 3$. Karena pada Teorema 3.1 diperoleh $\dim(Tr_n) = 2$ maka



Gambar 7. Graf Tr_3

berdasarkan Teorema 2.3 diperoleh bahwa $pd(Tr_n) \leq 3$. Karena $pd(Tr_n) \geq 3$ dan $pd(Tr_n) \leq 3$, maka $pd(Tr_n) = 3$. $\square$

5. Kesimpulan

Di dalam paper ini diperoleh dimensi metrik dari graf tangga segitiga Tr_n , untuk $n = 2, 3$ adalah $\dim(Tr_n) = 2$. Di dalam paper ini diperoleh juga dimensi partisi dari graf tangga segitiga Tr_n , untuk $n = 2, 3$ adalah $pd(Tr_n) = 3$.

Daftar Pustaka

- [1] Harary, F. dan R.A. Melter. 1976. On the metric dimension of a graph. *Ars Combin.* **2** : 191 – 195
- [2] Chartrand, G., E. Salehi, dan P. Zhang. 2000. The partition dimension of graph. *Aequations Math.* (59): 45 – 54
- [3] Chartrand, G., L. Eroh, M.A. Johnson, dan O.R. Oellermann. 2000. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph. *Discrete Applied Mathematics.* (105): 99 – 113
- [4] Bondy, J.A dan U.S.R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications*. The Macmillan Press LTD, London
- [5] Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit*. Edisi Ketiga. Informatika, Bandung
- [6] Low, R.M dan Lee, S.M. 2004. On the integer-magic spectra of tessellation graphs. *Australian Journal of Combinatorics.* (34): 195 – 210
- [7] Fitrianda, S. 2018. Rainbow Connection Number dan Strong Rainbow Connection Number pada Graf Tangga Segitiga yang Diperumum. *Skripsi S-1*, tidak diterbitkan. Fakultas MIPA Universitas Andalas