Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **2** Hal. 53 – 60
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

KAJIAN TENTANG METODE PERSAMAAN RICCATI PROYEKTIF

FITRI YESSI JAMI
Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : fitriyessijami@gmail.com

Abstract. In this paper, we discuss the derivation and application of a projective Riccati equation method in solving nonlinear partial differential equations. We also study the mathematical aspects of the method and its limitations in some particular cases.

Kata Kunci: Nonlinear partial differential equations, projective Riccati equation method, dominant balance principle

1. Pendahuluan

Fenomena gelombang nonlinier dapat dijumpai pada masalah dinamika fluida, kinematika reaksi kimia, proses biologi sel dan molekuler, fisika optik dan sebagainya [8]. Dalam banyak kasus, fenomena tersebut dapat dimodelkan secara matematis oleh suatu persamaan diferensial parsial (PDP). Semakin meningkatnya kajian terhadap model-model persamaan diferensial parsial dalam menjelaskan fenomena gelombang nonlinier, membuat semakin berkembang pula metode-metode alternatif dalam menyelesaikan persamaan tersebut. Beberapa diantara metode yang populer digunakan adalah metode tanh, metode *invers scatering*, metode dekomposisi Adomian dan metode persamaan Riccati proyektif [1,2].

Paper ini secara khusus akan mengkaji lebih detail penurunan dan penerapan metode persamaan Riccati proyektif dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier. Metode ini digagas pertama kali oleh Conte dan Mussete pada tahun 1992 dalam menentukan solusi soliton pada beberapa persamaan diferensial parsial nonlinier [3]. Metode Conte dan Mussete ini selanjutnya dikembangkan lebih lanjut oleh Yan pada tahun 2003 dengan memperkenalkan bentuk umum dari persamaan Riccati proyektif [4]. Beberapa peneliti telah menggunakan teknik Yan ini untuk menyelesaikan banyak persamaan diferensial parsial nonlinier.

Di antara hasil-hasil penelitian tersebut, belum ada yang membahas aspek matematis dari metode persamaan Riccati proyektif dan keterbatasannya dalam beberapa kasus tertentu. Barulah pada tahun 2009, Du menjelaskan hal tersebut dengan lebih rinci dan menyatakan hasilnya dalam beberapa teorema [5]. Paper ini akan mengeksplorasi kembali kajian yang dibahas oleh Du tersebut.

2. Penurunan Metode Persamaan Riccati Proyektif

2.1. *Konstruksi Awal*

Pandang bentuk umum persamaan diferensial parsial nonlinier berikut:

$$N(U, U_t, U_x, U_{xx}, \cdots) = 0. \tag{2.1}$$

Dalam hal ini akan ditinjau solusi gelombang berjalan

$$U(x,t) = u(\xi), \quad \xi = \omega x + ct, \tag{2.2}$$

dimana $\omega \neq 0$ menyatakan bilangan gelombang dan $c \neq 0$ menyatakan kecepatan gelombang. Dengan mensubstitusikan persamaan (2.2) ke persamaan (2.1) diperoleh persamaan diferensial biasa nonlinier berikut:

$$M(u, u', u'', \cdots) = 0. \tag{2.3}$$

2.2. *Metode Persamaan Riccati Proyektif*

Metode persamaan Riccati proyektif mengikuti langkah-langkah berikut [5]:
Langkah 1. Nyatakan solusi dari persamaan (2.3) dalam bentuk

$$u(\xi) = H_1(f) + gH_2(f), \tag{2.4}$$

dimana

$$H_1(f) = \sum_{i=0}^{m_1} b_i f^i, \tag{2.5}$$

dan

$$H_2(f) = \sum_{i=0}^{m_2} c_i f^i, \tag{2.6}$$

dengan $f = f(\xi)$ adalah solusi dari persamaan persamaan Riccati proyektif

$$f' = fg, \tag{2.7}$$

$$g^2 = F(f) = \sum_{i=0}^{m_3} a_i f^i, \quad g' = \frac{1}{2}F'(f)f, \tag{2.8}$$

dimana m_1, m_2 dan m_3 adalah bilangan bulat positif.

Dengan menggunakan aturan rantai terhadap persamaan (2.4) diperoleh

$$u'(\xi) = H_1'(f)f' + gH_2'(f)f' + g'H_2(f). \tag{2.9}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.7) dan (2.8) ke persamaan (2.9), diperoleh

$$u'(\xi) = H_1'(f)fg + \frac{1}{2}F'(f)fH_2(f) + H_2'(f)fF(f). \tag{2.10}$$

Lebih lanjut, turunan kedua dari $u(\xi)$ diberikan oleh

$$u''(\xi) = H_1''(f)f'fg + H_1'(f)f'g + H_1'(f)fg' + \frac{1}{2}F''(f)f'fH_2(f) + \frac{1}{2}F'(f)f'H_2(f) + \frac{1}{2}F'(f)fH_2'(f)f'. \tag{2.11}$$

Dengan menggunakan persamaan (2.7) dan (2.8), persamaan (2.11) menjadi

$$\begin{aligned} u''(\xi) = {} & H_1''(f)F(f)f^2 + H_1'(f)F(f)f + \frac{1}{2}H_1'(f)F'(f)f^2 + \frac{1}{2}H_2(f) \\ & F''(f)f^2g + \frac{1}{2}F'(f)H_2'(f)f^2g + \frac{3}{2}F'(f)H_2'(f)f^2g + H_2''(f) \\ & f^2gF(f) + H_2'(f)fgF(f). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Dengan cara serupa, $u'''(\xi), u^{(4)}(\xi)$ dan seterusnya dapat dicari.

Dengan mensubstitusikan persamaan (2.4), (2.7), (2.10) dan (2.11) ke persamaan (2.3) dan dengan menggunakan persamaan (2.7) dan(2.8), dihasilkan persamaan berikut:

$$G_1(f) + gG_2(f) = 0, \tag{2.13}$$

dimana $G_1(f)$ dan $G_2(f)$ adalah fungsi polinomial dalam f.

Langkah 2. Berdasarkan prinsip *dominant balance,* dapat ditentukan hubungan yang berlaku untuk m_1, m_2, m_3 sehingga nilai-nilai m_1, m_2, m_3 yang mungkin dapat ditentukan.

Langkah 3. Dengan menetapkan koefisien dari semua suku berdasarkan pangkat f dalam $G_1(f)$ dan $G_2(f)$ bernilai nol, akan diperoleh sistem persamaan aljabar yang darinya dapat ditentukan nilai $a_i(i = 0, 1, 2, \cdots, m_3)$, $b_i(i = 0, 1, 2, \cdots, m_1)$ dan $c_i(i = 0, 1, 2, \cdots, m_2)$. Meskipun demikian, sistem yang diperoleh mungkin saja tidak mempunyai solusi. Hal ini berarti persamaan (2.3) tidak dapat diselesaikan oleh metode persamaan Riccati proyektif ketika menggunakan nilai m_1, m_2, m_3 yang diperoleh pada Langkah 2.

Langkah 4. Dengan mengkuadratkan kedua ruas persamaan (2.7), persamaan (2.8) menjadi

$$(f')^2 = f^2F(f). \tag{2.14}$$

Perhatikan bahwa persamaan (2.14) dapat direduksi menjadi bentuk integral sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\xi} &= \pm f\sqrt{F(f)} \\ \int d\xi &= \pm \int \frac{df}{f\sqrt{F(f)}} \\ \xi - \xi_0 &= \pm \int \frac{df}{f\sqrt{F(f)}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Langkah 5. Dengan mensubstitusikan $a_i(i = 0, 1, 2, \cdots, m_3)$ ke persamaan (2.15) dan mengklasifikasikan akar-akar dari $F(f)$, maka persamaan (2.15) dapat diselesaikan sehingga diperoleh solusi eksak dari persamaan (2.14). Dengan demikian solusi eksak dari persamaan (2.3) juga dapat diperoleh.

3. Pembahasan

Untuk mengilustrasikan secara singkat ide dari analisis yang akan dilakukan, di sini hanya akan dibahas bentuk khusus persamaan (2.3) sebagai berikut:

$$u'' + \alpha u' = \sum_{i=0}^{k} d_i u^i, \tag{3.1}$$

dimana α, d_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, k)$ adalah konstanta sebarang dan $k = (2, 3, 4)$. Contoh persamaan diferensial parsial yang dapat diturunkan menjadi persamaan (3.1) adalah persamaan Benjamin-Bona-Mahony (BBM)-Burgers yang diberikan oleh [6]:

$$U_t - U_{xxt} - U_{xx} + UU_x = 0. \tag{3.2}$$

Berdasarkan analisis prinsip *dominant balance* maka dapat ditentukan nilai-nilai yang mungkin untuk $m_1,\ m_2$ dan m_3. Sehingga untuk $k = 2$ maka $m_3 = m_1$ dan $m_2 \leq \frac{m_1}{2}$. Sedangkan untuk $k = 3$, maka $m_1 \leq \frac{m_3}{2}$ dan $m_2 = 0$. Ketika $k = 2$ maka persamaan (3.1) menjadi:

$$u'' + \alpha u' = d_0 + d_1 u + d_2 u^2. \tag{3.3}$$

Sedangkan untuk $k = 3$ maka persamaan (3.1) menjadi:

$$u'' + \alpha u' = d_0 + d_1 u + d_2 u^2 + d_3 u^3. \tag{3.4}$$

Teorema 3.1. [5] *Dengan menggunakan metode persamaan Riccati proyektif, persamaan (*3.1*) mempunyai solusi nontrivial setidaknya pada kasus berikut:*

$$Kasus\ 1 : k = 2,\ m_3 = \ m_1 = 1,\ m_2 = 0;$$
$$Kasus\ 2 : k = 3,\ m_3 = 2,\ m_1 = 1,\ m_2 = 0.$$

Bukti. Kasus 1: $k = 2, m_3 = m_1 = 1, m_2 = 0$.
Ketika $k = 2$ maka persamaan (3.1) menjadi persamaan (3.3). Dengan mensubstitusikan persamaan (2.4), (2.10) dan (2.12) ke persamaan (3.3) dan dengan menggunakan persamaan (2.7) dan (2.8) dihasilkan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} G_1(f) = {} & H_1''(f)f^2F(f) + H_1'(f)fF(f) + \frac{1}{2}H_1'(f)f^2F'(f) + \frac{1}{2}\alpha F'(f)f \\ & H_2(f) + \alpha H_2'(f)fF(f) - d_2[H_1(f)]^2 - d_2F(f)[H_2(f)]^2 - d_1H_1(f) \\ & -d_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

dan

$$\begin{aligned} G_2(f) = {} & \frac{1}{2}F''(f)H_2(f)f^2 + \frac{1}{2}F'(f)H_2(f)f + \frac{3}{2}F'(f)H_2'(f)f^2 + H_2''(f)F(f)f^2 \\ & +H_2'(f)F(f)f + \alpha H_1'(f)f - 2d_2H_1(f)H_2(f) - d_1H_2(f). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dari Langkah 2 yang telah dilakukan, dapat dipilih $m_3 = 1$, $m_2 = 0$ dan $m_1 = 1$. Dengan mensubstitusikan $m_1 = 1$ ke persamaan (2.5) diperoleh

$$H_1(f) = b_1 f + b_0. \tag{3.7}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan $m_2 = 0$ ke persamaan (2.6) diperoleh

$$H_2(f) = c_0. \tag{3.8}$$

Terakhir dengan mensubstitusikan $m_3 = 1$ ke persamaan (2.8) diperoleh

$$F(f) = a_1 f + a_0. \tag{3.9}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.7), (3.8) dan (3.9) ke persamaan (3.5) dan (3.6) serta berdasarkan Langkah 3, tetapkan koefisien dari semua suku berdasarkan pangkat f dalam $G_1(f)$ dan $G_2(f)$ menjadi 0, sehingga diperoleh sistem persamaan aljabar berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}b_1 a_1 - d_2 b_1^2 &= 0,\\
b_1 a_0 + \frac{1}{2}\alpha a_1 c_0 - 2d_2 b_0 b_1 - d_2 a_1 c_0^2 - d_1 b_1 + \frac{1}{2}a_1 c_0 + \alpha b_1 - 2d_2 b_1 c_0 &= 0,\\
d_2 a_0 c_0^2 + d_2 b_0^2 + 2d_2 b_0 c_0 + d_1 b_0 + d_1 c_0 + d_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Maple, solusi dari sistem persamaan di atas adalah

$$a_1 = \frac{2}{3}d_2 b_1, \tag{3.10}$$

$$a_0 = \frac{1}{3}d_2 c_0(2d_2 c_0 - \alpha + 5) + 2d_2 b_0 - \alpha + d_1, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
d_0 = {} & c_0^2 d_2(-\frac{2}{3}c_0^2 d_2 + \frac{1}{3}\alpha c_0 d_2 - 2d_2 b_0 - \frac{5}{3}c_0 d_2 + \alpha - d_1) - d_2 b_0(2c_0 - b_0)\\
& -d_1 b_0 - d_1 c_0.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Selanjutnya solusi persamaan (3.3) diberikan mengikuti bentuk persamaan (2.4), yaitu:

$$u(\xi) = b_1 f + b_0 \pm c_0\sqrt{a_1 f + a_0}, \tag{3.13}$$

dimana parameter b_1, b_0, c_0, a_1 dan a_0 memenuhi persamaan (3.10), (3.11) dan (3.12), sedangkan f diperoleh dari penyelesaian persamaan integral (2.15), yaitu diberikan oleh

$$\pm\sqrt{a_0}(\xi - \xi_0) = -2\text{arctanh}\left(\frac{\sqrt{a_1 f + a_0}}{\sqrt{a_0}}\right). \tag{3.14}$$

$$\Rightarrow f = -\frac{a_0}{a_1 \cosh^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{a_0}(\xi - \xi_0)\right)}. \tag{3.15}$$

Kasus 2: Untuk $k = 3$.
Maka persamaan (3.1) menjadi persamaan (3.4). Dengan mensubstitusikan persamaan (2.4), (2.10) dan (2.12) ke persamaan (3.4) dan dengan menggunakan persamaan (2.7) dan (2.8) dihasilkan persamaan berikut:

$$\begin{aligned}
G_1(f) = {} & H_1(f)f^2F(f) + H_1'(f)fF(f) + \frac{1}{2}H_1(f)f^2F'(f) + \frac{1}{2}\alpha F'(f)fH_2(f)\\
& +\alpha H_2'(f)fF(f) - d_3[H_1(f)]^3 - d_2[H_1(f)]^2 - 3d_3F(f)H_1(f)[H_2(f)]^2\\
& -d_2F(f)[H_2(f)]^2 - d_1H_1(f) - d_0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

dan

$$\begin{aligned}
G_2(f) = {} & \frac{1}{2}F''(f)H_2(f)f^2 + \frac{1}{2}F'(f)H_2(f)f + \frac{3}{2}F'(f)H_2'(f)f^2 + H_2''\\
& (f)F(f)f^2 + H_2'(f)F(f)f + \alpha H_1'(f)f - 3d_3[H_1(f)]^2H_2(f) -\\
& d_3F(f)[H_2(f)]^3 - 2d_2H_1(f)H_2(f) - d_1H_2(f).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Dari Langkah 2 yang telah dilakukan pada Subbab 3.1.2 dapat dipilih $m_3 = 2$, $m_2 = 0$ dan $m_1 = 1$. Dengan mensubstitusikan $m_1 = 1$ ke persamaan (2.5) diperoleh

$$H_1(f) = b_1 f + b_0. \tag{3.18}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan $m_2 = 0$ ke persamaan (2.6) diperoleh

$$H_2(f) = c_0. \tag{3.19}$$

Terakhir dengan mensubstitusikan $m_3 = 2$ ke persamaan (2.8) diperoleh

$$F(f) = a_2 f^2 + a_1 f + a_0. \tag{3.20}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.18), (3.19) dan (3.20) ke persamaan (3.16) dan (3.17) dan berdasarkan Langkah 3, tetapkan koefisien dari semua suku berdasarkan pangkat$f$ dalam $G_1(f)$ dan $G_2(f)$ menjadi 0, maka diperoleh sistem persamaan aljabar berikut:

$$\begin{aligned}
2a_2c_0 - 3d_3b_1^2c_0 - d_3a_2c_0^3 &= 0,\\
\frac{1}{2}c_0a_1 + \alpha b_1 - 6d_3b_1b_0c_0 - d_3a_1c_0^3 - 2d_2b_1c_0 &= 0,\\
3d_3b_0^2c_0 + d_3a_0c_0^3 + 2d_2b_0c_0 + d_1c_0 &= 0,\\
2b_1a_2 - d_3b_1^3 - 3c_0^2d_3a_2b_1 &= 0,\\
\frac{3}{2}b_1a_1 + \alpha a_2c_0 - 3d_3b_1^2b_0 - 3d_3c_0^2a_2b_0 - 3d_3c_0^2a_1b_1 - d_2b_1^2 - d_2a_2c_0 &= 0,\\
b_1a_0 + \frac{1}{2}\alpha c_0a_1 - 3d_3b_1b_0^2 - 3d_3c_0^2a_0b_1 - 3d_3c_0^2a_1b_0 - 2d_2b_1b_0 - d_2a_1c_0^2 - d_1b_1 &= 0,\\
d_3b_0^3 + 3d_3c_0^2a_0b_0 + d_2b_0^2 + d_2a_0c_0^2 + d_1b_0 + d_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan Maple, solusi dari sistem persamaan di atas adalah

$$d_3 = \frac{1}{2c_0^2}, \qquad d_0 = \frac{d_2c_0^2(b_0^2 - b_1^2) + b_0^3 - b_1^2b_0}{c_0^2}, \tag{3.21}$$

$$a_0 = \frac{b_1^2}{c_0^2}, \qquad a_2 = \frac{b_1^2}{c_0^2}, \tag{3.22}$$

$$\alpha = \frac{3b_0 + 2d_2b_0^2}{c_0}, \qquad d_1 = -\frac{4d_2b_0c_0^2 + 3b_0^2 + b_1^2}{2c_0^2}. \tag{3.23}$$

Selanjutnya solusi persamaan (3.4) diberikan mengikuti bentuk persamaan (2.4), yaitu

$$u(\xi) = b_1 f + b_0 \pm c_0\sqrt{a_2f^2 + a_1f + a_0}, \tag{3.24}$$

dimana parameter $b_0,\ b_1,\ c_0, a_2,\ a_1$ dan a_0 memenuhi persamaan (3.21), (3.22) dan (3.23), sedangkan f diperoleh dari penyelesaian persamaan integral (2.15), yaitu

$$\pm(\xi - \xi_0) = \int \frac{df}{f\sqrt{a_2f^2 + a_1f + a_0}}. \tag{3.25}$$

□

Teorema 3.2. [5] *Dengan menggunakan metode persamaan Riccati proyektif, persamaan (3.1) hanya mempunyai solusi trivial setidaknya pada kasus* $k = 3$, $m_3 = 3,\ m_1 = 1,\ m_2 = 0$.

Bukti. Ketika $k = 3$, persamaan (3.1) menjadi persamaan (3.4), dengan mensubstitusikan persamaan (2.4), (2.10) dan (2.12) ke persamaan (3.4) dan dengan menggunakan persamaan (2.7) dan (2.8) diperoleh persamaan (3.16) dan (3.17). Dari Langkah 2, dapat dipilih $m_3 = 3$, $m_2 = 0$ dan $m_1 = 1$. Dengan mensubstitusikan $m_1 = 1$ ke persamaan (2.5) diperoleh

$$H_1(f) = b_1 f + b_0. \tag{3.26}$$

Selanjutnya dengan mensubstitusikan $m_2 = 0$ ke persamaan (2.6) diperoleh

$$H_2(f) = c_0. \tag{3.27}$$

Terakhir dengan mensubstitusikan $m_3 = 3$ ke persamaan (2.8) diperoleh

$$F(f) = a_3 f^3 + a_2 f^2 + a_1 f + a_0. \tag{3.28}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.26), (3.27) dan (3.28) ke persamaan (3.16) dan (3.17) dan berdasarkan Langkah 3, tetapkan koefisien dari semua suku berdasarkan pangkat$f$ dalam $G_1(f)$ dan $G_2(f)$ menjadi 0, maka diperoleh sistem persamaan aljabar berikut:

$$\frac{9}{2}a_3c_0 - d_3a_3c_0^3 = 0, \tag{3.29}$$

$$2a_2c_0 - 3d_3b_1^2c_0 - d_3a_2c_0^3 = 0, \tag{3.30}$$

$$\frac{1}{2}a_1c_0 + \alpha b_1 - 6d_3b_1b_0c_0 - d_3c_0^3a_1 - 2d_2b_1c_0 = 0, \tag{3.31}$$

$$2d_2b_0c_0 + d_1c_0 + 3d_3b_0^2c_0 + d_3c_0^3a_0 = 0, \tag{3.32}$$

$$\frac{5}{2}b_1a_3 - 3d_3a_3b_1c_0^2 = 0, \tag{3.33}$$

$$2b_1a_2 + \frac{3}{2}\alpha c_0a_3 - d_3b_1^3 - 3d_3a_3b_0c_0^2 - 3d_3a_2b_1c_0^2 - d_2a_3c_0^2 = 0, \tag{3.34}$$

$$\frac{3}{2}b_1a_1 + \alpha a_2c_0 - 3d_3b_0b_1^2 - 3d_3a_2b_0c_0^2 - 3d_3a_1b_1c_0^2 - d_2b_1^2 - d_2a_2c_0^2 = 0, \tag{3.35}$$

$$b_1a0 + \frac{1}{2}\alpha a_1c_0 - 3d_3b_1b_0^2 - 3d_3a_1b_0c_0^2 - 3d_3a_0b_1c_0^2 - 2d_2b_1b_0 - d_2a_1c_0^2 - d_1b_1 = 0, \tag{3.36}$$

$$d_3b_0^3 + 3d_3a_0b_0c_0^2 + d_2b_0^2 + d_2a_0c_0^2 + d_1b_0 + d_0 = 0. \tag{3.37}$$

Dari persamaan (3.29) dan (3.33) diperoleh $c_0 = 0$ atau $a_3 = 0$ atau $b_1 = 0$. Akibatnya semua parameter bernilai nol. Dengan demikian persamaan (3.1) hanya memiliki solusi trivial dengan metode persamaan Riccati proyektif ketika $k = 3$ dan $m_3 = 3, m_1 = 1, m_2 = 0$. □

Teorema 3.3. [5] *Jika $k = 4$, maka persamaan (3.1) tidak dapat diselesaikan dengan metode persamaan Riccati proyektif.*

Bukti. Jika $k = 4$, maka persamaan (3.1) menjadi

$$u'' + \alpha u' = d_0 + d_1u + d_2u^2 + d_3u^3 + d_4u^4. \tag{3.38}$$

Berdasarkan analisis prinsip *dominant balance*, maka dapat disimpulkan bahwa berapapun nilai m_1, m_2, m_3 yang dipilih dari bilangan bulat nonnegatif, orde tertinggi suku turunan dan orde tertinggi suku nonlinier tidak dapat *balance*. Dengan demikian, solusi persamaan (3.1) tidak dapat diperoleh dengan menggunakan metode persamaan Riccati proyektif. □

4. Kesimpulan

Pada paper ini telah dijelaskan penurunan dan penerapan metode persamaan Riccati proyektif dalam menyelesaikan persamaan diferensial parsial nonlinier. Disamping itu dijelaskan juga aspek matematis dari metode tersebut dan keterbatasannya dalam berbagai kasus tertentu.

References

[1] B., Li, dan Y., Chen. 2003. Nonlinear Partial Differential Equation Solved by Projective Riccati Equations Ansatz. *Z. Natuforsch*, 58a. 511-519.

[2] Wang, Zhen dan Zhang, Hong-Qing. 2006. New Exact Solutions to Some Difference Differential Equations. *Chinese Physics* **15** : 2210 – 2215.

[3] Conte,R. dan Mussete, M. 1992. Link Between Solitary Waves and Projective Riccati Equation. *J. Phys. A* **25** : 5609.

[4] Yan, Z. 2003. Generalized Method and It's Application in the Higher-order Nonlinear Schrödinger Equation in Nonlinear Optical Fitres, *Chaos, Solitons and Fractals* **16** : 759.

[5] Du, Xianghua. 2009. Some Notes on Projective Riccati Equation Method. *FIZIKA A 18* Vol 4, 153 – 164

[6] Mei, Ming dan Schmeiser, Christian. 2001. Asymptotic Profiles of Solutions for the BBM-Burgers Equation. *Funkcialaj Ekvacioj.* **44** : 151 – 170

[7] Liu, Cheng-Shi. 2009. The Exact Solution to Lienard Equation with High-Order Nonlinear Term and Applications. *FIZIKA A 18.* Vol 1, 29 – 44

[8] Wang, Deng-Shang dan Li, Hongbong. 2008. Single and Multi Solitary Wave Solutions to a Class of Nonlinear Evolution Equations. *Mathematical Analysis and Applications* **343** : 273 – 298.