MODEL PEMANENAN LOGISTIK DENGAN DAYA DUKUNG BERGANTUNG WAKTU

JOKO ALVENDAR, AHMAD IQBAL BAQI

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
alvendar@yahoo.com*

Abstrak. Pada paper ini akan dikaji kembali tentang pengembangan suatu model persamaan logistik sederhana. Model logistik ini dikembangkan dengan memperhatikan parameter daya dukung (*carrying capacity*) yang bergantung pada waktu. Dari model yang telah dianalisis ini selanjutnya akan dikaji model pemanenan dengan menentukan fungsi panen yang proposional. Persamaan model ini dianalisis untuk mengetahui kestabilan sistem. Sebagai contoh, model pertumbuhan dan pemanenan ini diterapkan pada pertumbuhan dan hasil panen rumput laut (*gracilaria gigas*).

Kata Kunci: Persamaan logistik, daya dukung (*carrying capacity*), pemanenan.

1. Pendahuluan

Populasi adalah kumpulan individu dari suatu spesies yang sama yang menempati suatu tempat tertentu. Laju perubahan suatu populasi dapat dipengaruhi oleh empat hal, yaitu tingkat kelahiran, tingkat kematian, imigrasi dan emigrasi. Laju perubahan suatu populasi dapat dimodelkan ke dalam suatu persamaan diferensial yang dapat memprediksikan pertumbuhan suatu populasi secara eksponensial. Terbatasnya sumber-sumber seperti ruang, makanan, dan juga adanya kepadatan populasi yang dapat menyebabkan populasi dibatasi oleh suatu daya dukung (*carrying capacity*) lingkungan sehingga pertumbuhan populasi secara kontinu akan menurun dan akhirnya akan berhenti atau punah. Hal ini terjadi apabila jumlah populasi sama dengan daya dukung lingkungan.

Suatu populasi seringkali pertumbuhannya meningkat secara eksponensial. Pada awalnya pertumbuhan melambat, tetapi pada akhirnya naik secara signifikan dan tajam, kemudian mendekati kapasitas daya tampung, dikarenakan sumber daya yang terbatas.

2. Model Pertumbuhan Logistik

Model pertumbuhan logistik dibangun dengan menggunakan kaidah logistik (*logistic law*) bahwa persediaan logistik ada batasnya. Model ini mengasumsikan pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (*equilibrium*). Pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama, sehingga grafiknya akan mendekati konstan. Model logistik sederhana yang mengasumsikan bahwa laju

pertumbuhan menurun secara linier dan bernilai nol saat $N = K$ adalah

$$\frac{dN(t)}{dt} = r(1 - \frac{N(t)}{K})N(t), N = f(t) \quad (2.1)$$

dan

$$N(t) = \frac{K}{(\frac{K}{N_0} - 1)e^{-rt} + 1}. \quad (2.2)$$

Model logistik sederhana memiliki dua titik kesetimbangan. Kesetimbangan pertama pada $N_1 = 0$ dan kesetimbangan kedua yang merupakan titik kestabilan populasi yaitu $N_2 = K$. Laju pertumbuhan tertinggi terjadi sebesar $\frac{1}{4}rK$ dan besarnya populasi pada saat laju pertumbuhan maksimum adalah $\frac{K}{2}$.

Daya dukung dimodelkan sebagai model logistik dan merupakan fungsi dari waktu. Besarnya daya dukung lingkungan pada suatu waktu diasumsikan lebih besar dari nol atau daya dukung awalnya (k_1), dan pertumbuhan daya dukung lingkungan akan berhenti pada saat telah mencapai maksimum (k_2). Dengan asumsi tersebut persamaan pertumbuhan yang dipengaruhi oleh daya dukung lingkungan merupakan persamaan dari persamaan logistik pada (1), dimana $K(t)$ memenuhi persamaan logistik yaitu

$$\frac{dK(t)}{dt} = r_1(K(t) - k_1)(1 - \frac{K(t) - k_1}{k_2}). \quad (2.3)$$

Jadi solusi persamaan logistiknya adalah

$$K(t) = \frac{k_2 + k_1 e^{-r_1 t} + k_1}{1 + e^{-r_1 t}}. \quad (2.4)$$

Laju pertumbuhan populasi dengan daya dukung lingkungan merupakan fungsi dari waktu dan diberikan oleh

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N(1 + e^{-r_1 t})}{k_1 + k_1 e^{-r_1 t} k_2}) \quad (2.5)$$

dengan $N = f(t)$, dan besarnya populasi pada saat t adalah

$$N(t) = \frac{(k_1 + k_1 e^{-r_1 t} + k_2)N_0}{(2k_1 + k_2 - 2N_0)e^{rt} + N_0(1 + e^{-r_1 t})}. \quad (2.6)$$

Gambar 1

Dengan laju pertumbuhan $\frac{dN}{dt} = 0$ terhadap jumlah populasi N diperoleh titik kesetimbangan $N_1 = 0$ dan $N_2 = k_1 + k_2$. Dan jumlah maksimum populasi N dengan $N_{max} = \frac{(k_1 + k_1 e^{-r_1 t} + k_2)}{2(1 + e^{-r_1 t})}$ sehingga laju pertumbuhan populasi dengan daya dukung lingkungan yang bergantung waktu diperoleh

$$(\frac{dN}{dt})_{max} = \frac{r(k_1 + k_1 e^{-r_1 t} + k_2)}{4(1 + e^{-r_1 t})}.$$

2.1. Model Pemanenan

Jika $g(N)$ adalah laju pertumbuhan dengan daya dukung lingkungan yang bergantung waktu, dan $h(N)$ adalah laju pemanenan, dimana ε adalah suatu usaha dari laju pemanen yang diasumsikan sebagai konstanta positif, maka laju pertumbuhan populasi dengan pemanen yang bergantung waktu adalah laju pertumbuhan populasi dengan daya dukung lingkungan $g(N)$ yang dipengaruhi oleh laju pemanenan dengan bergantung waktu $h(N)$ sehingga diperoleh persamaan model pemanenan sebagai berikut:

$$\frac{dN}{dt} = g(N) - h(N) \quad (2.7)$$

dimana $g(N) = rN(1 - \frac{N(1+e^{-r_1t})}{k_1+k_1e^{-r_1t}k_2})$ dan $h(N) = \varepsilon N$ sehingga diperoleh dalam persamaan yaitu

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N(1+e^{-r_1t})}{k_1+k_1e^{-r_1t}k_2}) - \varepsilon N. \quad (2.8)$$

Dengan $N_1 = 0$ dan $N_2 = \frac{(r-\varepsilon)}{r}(k_1+k_2)$ maka dengan persamaan titik kesetimbangan dari persamaan (8) dapat dibuat grafiknya

Gambar 2

Pada Gambar 2 terlihat bahwa laju pertumbuhan tanpa pemanenan dan laju pertumbuhan dengan pemanenan terhadap jumlah populasi N , dimana jumlah populasi dengan pemanenan tersebut diperoleh $N_{max} = \frac{(r-\varepsilon)(k_1+k_1e^{-r_1t}+k_2)}{2r(1+e^{-r_1t})}$ sehingga laju pertumbuhan populasi dengan pemanenan diperoleh

$$(\frac{dN}{dt})_{max} = \frac{(r-\varepsilon)^2(k_1+k_1e^{-r_1t}+k_2)}{4r(1+e^{-r_1t})}.$$

2.2. Kasus Pemodelan dari Persamaan Logistik

Berdasarkan hasil pembahasan di atas, maka dapat diaplikasikan model tersebut dalam beberapa kasus, dimana data tersebut diperoleh berdasarkan penelitian pertumbuhan rumput laut yang dilaksanakan oleh Yusuf Ismail Mochtar yang dilakukan di tambak Polikurtur Balai Besar Pengembangan dan Budidaya Air Payau (BBPBAP) Jepara tahun 2004. Dari hasil penelitian tersebut diperoleh model pertumbuhan logistik dari rumput laut.

(1) Kasus Pemodelan Logistik dengan Daya Dukung $K(t)$

Berat awal rumput laut yang ditanam adalah 10 gram sehingga total berat awal yang ditanam adalah 900 gram ($N_0 = 900$). Diasumsikan bahwa daya dukung minimal adalah 900 ($k_1 = 900$). Dari hasil penelitian diperoleh bahwa rata-rata

laju pertumbuhan tertinggi pada 20–30 hari setelah ditanam. Jika diasumsikan bahwa pada 30 hari setelah ditanam pertumbuhan daya dukung telah mencapai maksimum sehingga diperoleh $e^{-30r_1} = 0$. Bila diketahui $N(30) = 4377.96$ gram basah, $N(31) = 4514.6520$ gram basah dan $N(45) = 6428.34$ gram basah dengan $r_1 = 0.16$, $r = 0.07$, dan $k_2 = 7752$. Diperoleh laju pertumbuhan berat rumput laut pada waktu t dari persamaannya adalah

$$\begin{aligned}\frac{dN(t)}{dt} &= 0.07N(t)\left(1 - \frac{N(t)(1 + e^{-0.16t})}{k_1 + k_1e^{-0.16t} + k_2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} &= 0.07N(t)\left(1 - \frac{N(t)(1 + e^{-0.16t})}{900 + 900e^{-0.16t} + 7752}\right)\end{aligned}$$

maka dapat diperoleh dari persamaannya adalah

$$\begin{aligned}N(t) &= \frac{(900 + 900e^{-0.16t} + 7725)900}{(2.900 - 2.900 + 7725)e^{-0.07t} + 900(1 + e^{0.16t})} \\ \Leftrightarrow N(t) &= \frac{(900 + 900e^{-0.16t} + 7725)(1 + e^{0.16t})900}{900(1 + e^{0.16t}) + 7725e^{-0.07t}}\end{aligned}$$

(2) Kasus Model Logistik Sederhana

Dari model logistik dengan daya dukung lingkungan $K(t)$ diperoleh bahwa laju pertumbuhan intrinsik rumput laut adalah 0.07 sedangkan titik jenuh pertumbuhannya adalah sebesar 8652 dan total berat awal adalah 900 gram. Persamaan laju pertumbuhannya pada waktu t adalah persamaan dari persamaannya sehingga diperoleh

$$\frac{dN(t)}{dt} = 0.07N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{8652}\right).$$

Demikian sehingga solusi persamaan logistik dari persamaannya adalah

$$N(t) = \frac{8652}{1 + \left(\frac{8652}{900-1}\right)e^{-0.07t}}.$$

Dari hasil pemodelan logistik dari studi kasus diatas diperoleh plot sebagai berikut:

Gambar 3

Gambar 4

Gambar 5

Gambar 6

- Gambar 3. Grafik berat rumput laut dengan persamaan logistik sederhana yang dilakukan oleh Yusuf Ismail Mochtar.
- Gambar 4. Grafik berat rumput laut hasil penelitian dan model logistik sederhana dengan $r = 0.07$ dan $K = 8652$ terhadap waktu.
- Gambar 5. Grafik berat rumput laut hasil penelitian dan model logistik dengan daya dukung lingkungan dimana $r = 0.07, r_1 = 0.16, k_1 = 900$ dan $k_2 = 7752$ terhadap waktu.
- Gambar 6. Grafik laju pertumbuhan model logistik sederhana dan model logistik dengan daya dukung lingkungan $K(t)$ terhadap waktu.

3. Penutup

Laju pertumbuhan pada model logistik dengan daya dukung lingkungan merupakan fungsi dari waktu, dan memberikan hasil yang berbeda dengan laju pertumbuhan pada model logistik dengan daya dukung konstan. Perbedaan Laju pertumbuhan ini juga akan mempengaruhi perbedaan besarnya populasi pada saat yang sama sehingga akan mempengaruhi besarnya hasil panen.

Dari persamaan model logistik yang dipengaruhi oleh daya dukung lingkungan di peroleh model persamaan logistiknya,

$$N(t) = \frac{(k_1 + k_1 e^{-r_1 t} + k_2)N_0}{(2k_1 + k_2 - 2N_0)e^{rt} + N_0(1 + e^{-r_1 t})}$$

dan laju kesetimbangan dari persamaan logistik dengan daya dukung lingkungan diperoleh

$$N = 0 \text{ dan } N_2 = k_1 + k_2.$$

Dari laju pertumbuhan dengan pemanenan diperoleh modelnya adalah

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N(1 + e^{-r_1 t})}{k_1 + k_1 e^{-r_1 t} + k_2} \right) - \varepsilon N$$

dan laju kesetimbangan dari laju model pemanenan diperoleh

$$N_1 = 0 \text{ dan } N_2 = \frac{(r-\varepsilon)}{r} (k_1 + k_2).$$

4. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Syafruddin, Ibu Lyra Yulianti, dan Ibu Hazmira Yozza yang telah memberikan masukan dan saran sehingga paper ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Ismail, M. 2001. *Laju Pertumbuhan dan Produksi Rumput Laut Gracilaria Gigas Harv. Dengan Metode dan Jarak Tanam Berbeda di Tambak Polikultur Jepara*. Universitas Jendral Soedirman, Purwokerto
- [2] Meyer, dan Jesse H. Ausubel. 1999. Carrying Capacity: A Model with Logically Varying Limits. *J. Technological Forecasting and Sosial Change*. Vol. 61, No. 3, hal. 209-214
- [3] Rakhmawati, fitria and Sutimin. 2006. Model Pemanenan Logistik dengan Daya Dukung Bergantung Waktu Pada Budidaya Rumput Laut. Prosiding SPMIP. hal. 43-96
- [4] Ross. 1984. *Persamaan Diferensial*. Universitas Indonesia, Jakarta
- [5] Soemarto. 1987. *Kalkulus Lanjutan*. Universitas Indonesia, Jakarta