PENENTUAN BILANGAN KROMATIK LOKASI UNTUK GRAF BERLIAN Br_n UNTUK $n = 3$ DAN $n = 4$

MUTIARA RAMADANI SYAFNUR, LYRA YULIANTI, DES WELYYANTI

*Jurusan Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : mutiararamadani222@gmail.com*

Abstrak. Misalkan graf $G = (V, E)$ adalah graf terhubung. Kelas warna pada G dinotasikan dengan S_i , merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$. Berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π disebut kode warna dari v , dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k -vektor,

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π , maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut bilangan kromatik lokasi, dinotasikan $\chi_L(G)$. Pada tulisan ini akan dibahas bilangan kromatik lokasi dari graf berlian Br_n untuk $n = 3$ dan $n = 4$.

Kata Kunci: Kelas Warna, Kode Warna, Bilangan Kromatik Lokasi, Graf Berlian

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu bagian dari ilmu matematika. Banyak permasalahan yang dapat dinyatakan dan diselesaikan dengan menggunakan teori graf. Keunikan teori graf adalah kesederhanaan pokok bahasan yang dipelajarinya, karena dapat disajikan dengan titik dan sisi. Titik menggambarkan objek-objek tertentu dan sisi menggambarkan hubungan antara objek-objek tersebut. Misalkan graf merepresentasikan bentuk molekul air yang terdiri dari atom hidrogen dan oksigen. Masalah dan solusi yang didapat dari contoh kasus tersebut merupakan teknik dari teori graf, yaitu dengan titik-titik graf menyatakan atom dan sisi-sisi graf menyatakan ikatan antara atom-atom tersebut.

Secara umum, graf G adalah pasangan himpunan V dan E , dituliskan $G = (V, E)$, dimana V adalah suatu himpunan titik (vertex) yang tidak kosong dan E adalah himpunan sisi (edge) yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik berbeda dari V . Misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan titik yang berisi n titik di G dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ adalah himpunan sisi yang berisi m sisi di G . Secara umum, sisi dapat ditulis dengan $v_i v_j$ atau $v_j v_i$. Kardinalitas dari himpunan $V(G)$ disebut *orde* dari G dan kardinalitas dari himpunan $E(G)$ disebut *ukuran (size)* dari G .

Pewarnaan graf diyakini pertama kali muncul sebagai masalah pewarnaan peta, dimana warna setiap daerah pada peta yang berbatasan dibuat berlainan sehingga

mudah untuk dibedakan. Masalah pewarnaan graf juga memiliki banyak aplikasi di dalam bidang lain. Salah satunya adalah pembuatan suatu jadwal, yang bertujuan agar waktu dan tempat yang sudah diatur sedemikian mungkin tidak saling tumpang tindih. Pewarnaan graf terdiri dari pewarnaan titik dan pewarnaan sisi.

Pewarnaan k -sisi untuk G adalah pemberian k warna pada sisi-sisi G sedemikian hingga setiap dua sisi yang bertemu pada titik yang sama mempunyai warna berbeda. Pewarnaan titik pada graf adalah pemberian warna untuk setiap titik pada graf sehingga tidak ada dua titik yang bertetangga berwarna sama. Banyaknya warna minimal yang dipakai untuk pewarnaan graf disebut bilangan kromatik dari graf G dan disimbolkan dengan $\chi(G)$.

Konsep pewarnaan lokasi pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk. [2] pada tahun 2002 dengan menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa graf sebagai berikut, untuk graf lintasan P_n dengan $n \geq 3$ diperoleh $\chi_L(P_n) = 3$. Untuk graf siklus diperoleh $\chi_L(C_n) = 3$ untuk n ganjil atau $\chi_L(C_n) = 4$ untuk n genap. Selanjutnya, juga diperoleh bilangan kromatik lokasi untuk graf multipartit lengkap dan graf bintang ganda.

Pada tahun 2003, Chartrand dkk. [3] mengkarakterisasi graf orde n dengan bilangan kromatik lokasi $n - 1$. Karena masih sedikit bilangan kromatik lokasi yang diketahui, maka topik pewarnaan lokasi menarik untuk dikaji lebih lanjut. Untuk itu akan dibahas penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf berlian, dinotasikan Br_n untuk $n \geq 3$.

2. Definisi dan Terminologi dalam Teori Graf

Graf G adalah pasangan himpunan V dan E , dituliskan $G = (V, E)$, dimana V adalah suatu himpunan titik (*vertex*) yang tidak kosong dan E adalah himpunan sisi (*edge*) yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik berbeda dari V . Misalkan $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan titik yang berisi n titik di G dan $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ adalah himpunan sisi yang berisi m sisi di G . Secara umum, sisi dapat ditulis dengan $v_i v_j$ atau $v_j v_i$.

2.1. Graf Berlian

Graf berlian adalah graf yang diperoleh dari graf tangga segitiga $2n - 1$ dan ditambahkan satu titik yang bertetangga dengan sebanyak n titik di graf tangga segitiga tersebut. Perhatikan graf Br_n pada gambar di bawah ini :

 Gambar 1. Graf Br_n

Graf berlian dinotasikan Br_n dengan $n \geq 3$ adalah graf dengan

$$V(Br_n) = \{v\} \cup \{v_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{u_i | 1 \leq i \leq n-1\},$$

$$E(Br_n) = \{vv_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{v_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i u_{i+1} | 1 \leq i \leq n-2\}$$

$$\cup \{u_i v_i | 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{u_i v_{i+1} | 1 \leq i \leq n-1\}.$$

2.2. Bilangan Kromatik Lokasi

Bilangan kromatik (*chromatic number*) dari graf G adalah bilangan asli terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai suatu pewarnaan- k titik sejati. Bilangan kromatik dari G dinotasikan dengan $\chi(G)$. Misalkan $\chi(G) = k$, ini berarti titik-titik di G paling kurang diwarnai dengan k warna dan tidak dapat diwarnai dengan $k-1$ warna. jika titik-titik di G diwarnai dengan k warna maka tidak ada titik yang bertetangga mempunyai warna yang sama.

Kelas warna pada G dinotasikan dengan S_i , merupakan himpunan titik-titik yang berwarna i dengan $1 \leq i \leq k$. Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ merupakan partisi terurut dari $V(G)$. Berdasarkan suatu pewarnaan titik, maka representasi v terhadap Π disebut **kode warna** dari v , dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari suatu titik $v \in V(G)$ didefinisikan sebagai k -vektor,

$$c_\Pi(v) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \dots, d(v, S_k)),$$

dimana $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik yang berbeda di G memiliki kode warna yang berbeda untuk suatu Π , maka c disebut **pewarnaan lokasi** dari G . Minimum dari banyaknya warna yang digunakan pada pewarnaan lokasi dari graf G disebut **bilangan kromatik lokasi**, dinotasikan $\chi_L(G)$.

Chartrand dkk. (2002) telah memberikan teorema dasar bilangan kromatik lokasi suatu graf. Teorema tersebut dijelaskan pada teorema-teorema di bawah ini. Definisikan $N(v)$ sebagai himpunan yang berisi semua titik yang menjadi tetangga dari v .

Teorema 2.1. [2] Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Jika u dan v adalah dua titik pada graf G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti. Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G . Misalkan $\Pi = (S_1, S_2, \dots, S_k)$ adalah partisi dari himpunan titik-titik di G dengan S_i menyatakan kelas warna untuk $1 \leq i \leq k$. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama. Akibatnya, $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$ maka $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Dengan demikian, haruslah $c(u) \neq c(v)$. $\square$

Akibat 2.2. [2] Jika G adalah suatu graf terhubung yang memuat suatu titik yang bertetangga dengan k daun di G , maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti. Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G . Dari Teorema 2.1 setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna berbeda untuk setiap x_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i , maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i . Akibatnya diperoleh bahwa $\chi_L(G) \geq k + 1$. $\square$

3. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Berlian

Teorema 3.1. $\diamond$ Misalkan Br_n adalah graf berlian, maka

$$\chi_L(Br_n) = 4, \text{ untuk } n = 3 \text{ dan } 4.$$

Bukti. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi dan $\Pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi titik-titik pada graf G dengan S_i menyatakan kelas warna ke- i untuk $1 \leq i \leq k$. Akan dibuktikan bilangan kromatik lokasi graf belian Br_n dengan $n = 3$ dan $n = 4$.

Kasus 1. Untuk $n = 3$, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) = 4$. Definisikan pewarnaan titik di G sebagai berikut $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sedemikian sehingga,

$$\begin{aligned} c(v) &= c(u_1) = 1, \\ c(v_1) &= c(u_2) = 2, \\ c(v_2) &= 3, \\ c(v_3) &= 4. \end{aligned}$$

Dalam menentukan bilangan kromatik lokasi terdapat syarat-syarat yang harus dipenuhi. Pertama, setiap titik yang bertetangga tidak boleh diwarnai sama. Dari definisi pewarnaan di atas dapat dilihat bahwa, setiap titik yang bertetangga diwarnai berbeda. Kedua, setiap titik dipartisi terhadap Π yang dikelompokkan kedalam kelas warna. Kemudian, kode warna setiap titik di G terhadap Π harus berbeda,

atau dinotasikan $c_{\Pi}(v_i) \neq c_{\Pi}(v_j)$ untuk $i \neq j$. Didefinisikan kelas warna sebagai berikut $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ dengan

$$\begin{aligned} S_1 &= \{v, u_1\}, \\ S_2 &= \{v_1, u_2\}, \\ S_3 &= \{v_2\}, \\ S_4 &= \{v_3\}. \end{aligned}$$

Diperoleh kode warna setiap titik di G terhadap Π sebagai berikut.

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(v) &= (d(v, S_1), d(v, S_2), d(v, S_3), d(v, S_4)), \\ &= (0, 1, 1, 1), \\ c_{\Pi}(v_1) &= (d(v_1, S_1), d(v_1, S_2), d(v_1, S_3), d(v_1, S_4)), \\ &= (1, 0, 1, 2), \\ c_{\Pi}(v_2) &= (d(v_2, S_1), d(v_2, S_2), d(v_2, S_3), d(v_2, S_4)), \\ &= (1, 1, 0, 1), \\ c_{\Pi}(v_3) &= (d(v_3, S_1), d(v_3, S_2), d(v_3, S_3), d(v_3, S_4)), \\ &= (1, 1, 1, 0), \\ c_{\Pi}(u_1) &= (d(u_1, S_1), d(u_1, S_2), d(u_1, S_3), d(u_1, S_4)), \\ &= (0, 1, 1, 2), \\ c_{\Pi}(u_2) &= (d(u_2, S_1), d(u_2, S_2), d(u_2, S_3), d(u_2, S_4)), \\ &= (1, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

Dari kode warna di atas dapat dilihat bahwa, setiap titik di G mempunyai kode warna berbeda. Jadi, $\chi_L(G) \leq 4$ untuk $n = 3$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) \geq 4$ untuk $n = 3$. Untuk menentukan batas bawah dari $\chi_L(G) \geq 4$ untuk $n = 3$ diberikan semua kemungkinan pewarnaan dengan 3 warna seperti Gambar 2.

Gambar 2. Graf Br_3 dengan $\chi_L(G) = 3$.

Pada Gambar 2 dapat dilihat bahwa setiap pewarnaan memiliki 2 kemungkinan. Pada setiap pewarnaan pada Gambar 3 terdapat 2 titik yang bertetangga, hal ini kontradiksi dengan definisi bilangan kromatik lokasi yang menyatakan bahwa setiap

titik di G haruslah memiliki kode warna yang berbeda. Jadi, batas bawah untuk bilangan kromatik lokasi $\chi_L(G) \geq 4$. Maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik lokasi $\chi_L(G) = 4$ untuk $n = 3$.

Kasus 2. Untuk $n = 4$, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) = 4$. Definisikan pewarnaan titik di G sebagai berikut $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ sedemikian hingga,

$$\begin{aligned} c(v) &= c(u_1) = c(u_3) = 1, \\ c(v_1) &= c(v_4) = c(u_2) = 2, \\ c(v_2) &= 3, \\ c(v_3) &= 4. \end{aligned}$$

Karena Br_4 diwarnai mengikuti pewarnaan Br_3 maka diperoleh kode warna setiap titik di G terhadap Π untuk Br_4 sama dengan kode warna setiap titik di G terhadap Π untuk Br_3 . Hanya saja karena $Br_3 \subseteq Br_4$ maka Br_4 memiliki kode warna tambahan yaitu :

$$\begin{aligned} c_{\Pi}(v_4) &= (d(v_4, S_1), d(v_4, S_2), d(v_4, S_3), d(v_4, S_4)), \\ &= (1, 0, 2, 1), \\ c_{\Pi}(u_3) &= (d(u_3, S_1), d(u_3, S_2), d(u_3, S_3), d(u_3, S_4)), \\ &= (0, 1, 2, 1). \end{aligned}$$

Dari kode warna di atas dapat dilihat bahwa, setiap titik di G mempunyai kode warna berbeda. Jadi, $\chi_L(G) \leq 4$ untuk $n = 4$.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\chi_L(G) \geq 4$ untuk $n = 4$. Untuk menentukan batas bawah dari $\chi_L(G) \geq 4$ untuk $n = 4$ diberikan semua kemungkinan pewarnaan dengan 3 warna seperti Gambar 3.

Gambar 3. Graf Br_4 dengan $\chi_L(G) = 3$

Pada Gambar 3 dapat dilihat bahwa setiap pewarnaan memiliki 3 kemungkinan. Pada setiap pewarnaan pada Gambar 3 terdapat 2 titik di G yang memiliki kode warna yang sama, hal ini kontradiksi dengan definisi bilangan kromatik lokasi yang menyatakan bahwa setiap titik di G haruslah memiliki kode warna yang berbeda. Jadi, batas bawah untuk bilangan kromatik lokasi $\chi_L(G) \geq 4$. Maka dapat disimpulkan bahwa bilangan kromatik lokasi $\chi_L(G) = 4$ untuk $n = 4$, seperti pada Gambar 4. Jadi dari kasus 1 dan kasus 2 dapat dilihat bahwa $\chi_L(G) = 4$ untuk

Gambar 4. Graf Br_4 dengan $\chi_L(G) = 4$

$n = 3$ dan $n = 4$.

□

4. Kesimpulan

Dari Algoritma di atas diperoleh bilangan kromatik lokasi graf berlian Br_3 dan Br_4 sebagai berikut.

$$\chi_L(Br_n) = 4, \text{ untuk } n = 3 \text{ dan } n = 4.$$

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Yanita, Dr. Mahdhivan Syafwan dan Dr. Effendi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J.A dan Murty, U.S.R. 1976. *Graph Theory with Application*. London: The Macmillan Press LTD.
- [2] Buckley, F. dan Lewinter, M. 1993. *A Friendly Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, New Jersey.
- [3] Chartrand, G., D. Erwin, M. A. Henning, P.J. Slater dan P. Zhang. 2002. The locating chromatic number of a graph, *Bull. Inst. Combin. Appl.* 36: 89 – 101.
- [4] Chartrand, G., dkk . 2003. Graphs of order n with locating-chromatic number $n - 1$, *Discrete Math.* 269: 65 – 79
- [5] M.A Shulhany dan A.N.M Salman. 2015. Bilangan terhubung pelangi graf berlian. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika UMS*.