DIMENSI METRIK DARI GRAF $W_n + C_n$, UNTUK $n \in \{3, 4\}$

ROBI NUGRAHA SAYI PUTRA, LYRA YULIANTI, SYAFRIZAL SY

*Jurusan Matematika,
 Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
 Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
 email : robinugrahasayiputra@gmail.com*

Abstrak. Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf terhubung dan misal terdapat dua titik $u, v \in V$, jarak antara u dan v didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Untuk suatu himpunan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq V$ dan suatu titik v pada G , $r(v | A) = (d(v, a_1), d(v, a_2), \dots, d(v, a_k))$ disebut representasi v relatif terhadap A . Himpunan A dinamakan himpunan pemisah dari G jika semua titik di G mempunyai representasi yang berbeda. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum. Kardinalitas dari himpunan pemisah tersebut dinamakan dimensi metrik dari G , dinotasikan dengan $\dim(G)$. *Join* dari graf G dan H dinotasikan dengan $G + H$ adalah Suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan semua titik pada graf G ke setiap titik di graf H . Pada tulisan ini diperoleh bahwa $\dim(W_3 + C_3) = 6$ dan $\dim(W_4 + C_4) = 4$.

Kata Kunci: Representasi, Himpunan Pemisah, Dimensi Metrik, Join

1. Pendahuluan

Pada navigasi robot, suatu robot bergerak dari satu titik ke titik lainnya pada bidang dengan meminimalkan kesalahan yang terjadi dalam menerjemahkan petunjuk (kode) yang didapat dari titik-titik lokasi yang dilaluinya. Untuk itu, setiap titik lokasi pada bidang gerak robot harus memberikan kode yang berbeda dan unik. Jika titik lokasi dipandang sebagai titik dan lintasan robot dipandang sebagai suatu sisi, maka bidang gerak robot dapat direpresentasikan sebagai graf. Agar robot dapat bergerak secara efisien, maka robot harus cepat menerjemahkan kode titik-titik lokasi yang dilaluinya. Untuk itu, titik lokasi harus memiliki komponen seminimal mungkin. Jika komponen kode titik lokasi menggunakan pengertian jarak, maka masalah ini disebut dimensi metrik. [4]

Pada [2] telah dibahas tentang penentuan dimensi metrik dari graf $K_{s,t}$ ($s, t \geq 1$), $K_s + K_t$ ($s \geq 1, t \geq 2$), dan $K_s + (K_1 \cup K_t)$ ($s, t \geq 1$). Selanjutnya pada [5] dibahas dimensi metrik graf $P_m + P_n$, $K_m + G$ untuk sebarang graf terhubung G , dan $P_m + K_n$. Berdasarkan pengamatan penulis, belum ada yang meneliti dimensi metrik dari graf $W_n + C_n$ untuk $n \in \{3, 4\}$, sehingga penulis tertarik untuk meneliti dimensi metrik dari graf $W_n + C_n$.

2. Landasan Teori

2.1. Definisi dan Terminologi Graf

Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan (V, E) , yang dalam hal ini V adalah himpunan tidak-kosong dari titik-titik (*vertices* atau *node*) dan E adalah himpunan sisi (*edge* atau *arcs*) yang menghubungkan sepasang titik. Suatu graf dikatakan terbatas (*finite*) jika himpunan titik dan himpunan sisinya terbatas. Graf yang hanya memiliki Suatu titik disebut graf *trivial*. Suatu graf dikatakan sederhana jika tidak memiliki *loop* dan sisi ganda. Pada tulisan ini graf yang dibahas adalah graf sederhana.

Suatu jalan (*walk*) di G adalah barisan terbatas yang tidak kosong $X = v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$. Jika sisi-sisi $e_1, e_2, \dots, e_n$ pada suatu jalan semuanya berbeda maka X dikatakan sebagai jejak (*trail*). Jika ditambahkan bahwa $v_0, v_1, \dots, v_n$ adalah titik-titik yang berbeda maka X dikatakan sebagai suatu lintasan (*path*). Lintasan dengan panjang n dilambangkan dengan P_n . Titik u dan v dikatakan terhubung jika terdapat Suatu lintasan dari u ke v di G . Graf G dikatakan graf terhubung (*connected graph*) jika untuk sebarang titik u dan v di G saling terhubung. Jarak dari u ke v dinotasikan dengan $d(u, v)$ adalah panjang lintasan terpendek dari u ke v di G . Diameter dari G adalah maksimum jarak antara dua titik di G yang dinotasikan dengan $diam(G)$.

Suatu jalan dikatakan tertutup jika memiliki titik asal dan titik ujung yang sama. Suatu jejak tertutup yang titik asal dan titik internalnya berbeda dinamakan lingkaran (*cycle*). Graf roda adalah graf yang diperoleh dari suatu lingkaran dengan menambahkan suatu titik baru dan sisi-sisi yang menghubungkannya ke setiap titik di lingkaran. Graf roda yang memiliki n titik pada lingkarannya dinotasikan dengan W_n .

2.2. Operasi Join pada Graf

Join dari graf G dan H dinotasikan dengan $G + H$ adalah suatu graf yang diperoleh dengan menghubungkan semua titik pada graf G ke setiap titik di graf H [1]. Misalkan $V(C_n) = \{x_j; 1 \leq j \leq n\}$ dan $E(C_n) = \{x_j x_{j+1}; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\}$ adalah himpunan titik dan himpunan sisi untuk graf C_n . Misalkan $V(W_n) = \{c, y_i; 1 \leq i \leq n\}$ dan $E(W_n) = \{cy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_1 y_n\}$, maka graf $(W_n + C_n)$ memiliki himpunan titik dan himpunan sisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} V(W_n + C_n) &= \{c, y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{x_j; 1 \leq j \leq n\}. \\ E(W_n + C_n) &= \{cy_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_1 y_n\} \\ &\quad \cup \{x_j x_{j+1}; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{x_1 x_n\} \\ &\quad \cup \{x_i y_j, cx_i; 1 \leq i, j \leq n\}. \end{aligned}$$

2.3. Dimensi Metrik pada Graf

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf terhubung dan misal terdapat dua titik $u, v \in V$, jarak antara u dan v didefinisikan sebagai panjang lintasan terpendek antara u dan v pada G yang dinotasikan dengan $d(u, v)$. Untuk suatu himpunan $A =$

$\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq V$ dan suatu titik v pada G , maka

$$r(v \mid A) = (d(v, a_1), d(v, a_2), \dots, d(v, a_k))$$

disebut representasi v relatif terhadap A . Himpunan A dinamakan himpunan pemisah dari G jika semua titik di G mempunyai representasi yang berbeda. Himpunan pemisah dengan kardinalitas minimum disebut himpunan pemisah minimum. Kardinalitas dari himpunan pemisah tersebut dinamakan dimensi metrik dari G , dinotasikan dengan $\dim(G)$ [2].

Teorema 2.1. [2] *Misal G adalah graf terhubung dengan banyak titik $n \geq 2$, maka $\dim(G) = 1$ jika dan hanya jika $G \cong P_n$.*

Teorema 2.2. [2] *Jika C_n adalah graf lingkaran dengan n titik dan $n \geq 3$, maka $\dim(C_n) = 2$.*

Teorema 2.3. [6] *Jika W_n adalah graf roda dengan $n \geq 3$ maka*

$$\dim(W_n) = \begin{cases} 2, & n = 4 \text{ atau } n = 5, \\ 3, & n = 3 \text{ atau } n = 6, \\ 3 + 2k, & n = 7 + 5k \text{ atau } 8 + 5k, \\ 4 + 2k, & n = 9 + 5k \text{ atau } 10 + 5k \text{ atau } 11 + 5k, \text{ untuk } k \geq 0. \end{cases}$$

Teorema 2.4. [3] *Untuk sebarang graf terhubung G dan H ,*

$$\dim(G + H) \geq \dim(G) + \dim(H).$$

3. Dimensi Metrik dari Graf $W_n + C_n$, untuk $n \in \{3, 4\}$

Pada bab ini akan dibahas dimensi metrik dari graf $W_n + C_n$ untuk $n \in \{3, 4\}$.

Teorema 3.1. *Misalkan W_n adalah graf roda dengan $n + 1$ titik dan C_n adalah graf lingkaran dengan n titik, dengan $n \geq 3$, maka*

$$\dim(W_n + C_n) = \begin{cases} 6, & \text{atau } n = 3, \\ 4, & \text{atau } n = 4. \end{cases}$$

Bukti. Pembuktian Teorema ini ditulis dalam dua kasus berdasarkan nilai n sebagai berikut.

Kasus 1 : untuk $n = 3$. Misalkan $V(W_3) = \{y_1, y_2, y_3, c\}$ dan $V(C_3) = \{x_1, x_2, x_3\}$ sehingga $V(W_3 + C_3) = \{y_1, y_2, y_3, c, x_1, x_2, x_3\}$. Berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh $\dim(W_3 + C_3) \geq 5$. Pilih $A = \{x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ adalah himpunan pemisah untuk graf $W_3 + C_3$ dengan $|A| = 5$. Karena pada $W_3 + C_3$ semua titik saling bertetangga, maka untuk sebarang dua titik di $W_3 + C_3$ yang bukan anggota A representasinya akan sama yaitu $(1, 1, 1, 1, 1)$, sehingga haruslah $\dim(W_3 + C_3) \geq 6$. Selanjutnya pilih $A = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$. Representasi titik yang merupakan anggota A akan selalu berbeda karena posisi angka '0' pada representasinya kan selalu berbeda. Untuk titik c yang bukan anggota A , $r(c \mid A) = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Karena representasi setiap titik terhadap A berbeda maka diperoleh bahwa A adalah himpunan pemisah minimum untuk graf $W_3 + C_3$ dan diperoleh $\dim(W_3 + C_3) = 6$

Kasus 2: untuk $n = 4$.

Berdasarkan Teorema 2.4 diperoleh $\dim(W_4 + C_4) \geq 4$. Misalkan $V(W_4) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, c\}$ dan $V(C_4) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ sehingga $V(W_4 + C_4) = \{y_1, y_2, y_3, y_4, c, x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Selanjutnya misalkan $A = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ adalah himpunan pemisah untuk graf $W_4 + C_4$, maka semua titik yang menjadi anggota A akan memiliki representasi yang berbeda karena angka '0' terletak pada posisi yang berbeda untuk setiap titik. Untuk titik bukan anggota A representasinya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} r(x_3|A) &= (2, 1, 1, 1) & r(y_3|A) &= (1, 1, 2, 1) \\ r(x_4|A) &= (1, 2, 1, 1) & r(y_4|A) &= (1, 1, 1, 2) \\ r(c|A) &= (1, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

Karena representasi setiap titik terhadap A berbeda maka diperoleh $\dim(W_4 + C_4) \leq 4$ dan A adalah himpunan pemisah minimum untuk $W_4 + C_4$. Akibatnya $\dim(W_4 + C_4) = 4$. $\square$

Gambar 1. Cara menentukan anggota A pada $W_3 + C_3$ (Catatan: (1) Titik didalam persegi adalah titik yang merupakan anggota himpunan pemisah. (2) Penggunaan warna untuk sisi graf tidak memiliki makna khusus.)

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini diperoleh bahwa misalkan W_n adalah graf roda dengan $n + 1$ titik dan C_n adalah graf lingkaran dengan n titik, dengan $n \geq 3$, maka

$$\dim(W_n + C_n) = \begin{cases} 6, & \text{atau } n = 3, \\ 4, & \text{atau } n = 4 \end{cases}$$

5. Ucapan Terima kasih

Terima kasih kepada bapak Narwen, M.Si, Ibu Dr. Ferra Yanuar, dan Bapak Efendi, M.Si selaku penguji sehingga penelitian ini dapat terlaksana dengan baik.

Gambar 2. Cara menentukan anggota A pada $W_4 + C_4$

Daftar Pustaka

- [1] Bondy, J.A. dan U.S.R Murty .1976. *Graph Theory with Applications*. London.
- [2] Chartrand, G. L. Eroh, M.A. Johnson, and O. R. Oellerman. 2000. Resolvability in Graps and the Metric Dimension of a Graph. *Discrete Appl. Math.* **105**: 99 – 113
- [3] Hernando, C., et.al. 2005. On the metric dimension of some families of graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics.* **22**: 129 – 133
- [4] Khuller, S., B. Rahavachari, dan A. Rosenfeld. 1996. Landmark in graph. *Discret Appl. Math.* **70**: 217 – 229
- [5] Rawat, B.S., P. Pradhan,. 2017. Metric dimension of some graph under join operation. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics.* **13**: 3331 – 3348
- [6] Shanmukha, B., B. Sooryanarayana, and K.S. Harinath,. 2002. Metric dimension of wheels. *Far East Journal of Applied Mathematics.* **8**: 217 – 229