Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **2** Hal. 179 – 186
ISSN : 2303–291X

SOLUSI UNTUK PERSAMAAN MATRIKS $\boldsymbol{AXB + CYD = E}$

SHENNA MIRANDA
Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : shennamiranda06@gmail.com

Abstrak. Penentuan solusi dari suatu persamaan matriks $AXB + CYD = E$ untuk kasus dimana matriks A, B, C dan D tidak hanya bujursangkar dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan Penrose. Pada makalah ini akan dikaji tentang solusi X dan Y dari persamaan matriks $AXB + CYD = E$.

Kata Kunci: Persamaan Penrose, Solusi sistem linier

1. Pendahuluan

Sebuah matriks dikatakan mempunyai invers jika matriks tersebut bujursangkar dan *nonsingular*. Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$ dan terdapat matriks A^{-1} sedemikian sehingga $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, maka A disebut invertibel dan A^{-1} disebut invers dari matriks A [1].

Pada tahun 1920 E.H Moore mendeskripsikan salah satu jenis invers matriks yang dikenal dengan nama generalisasi invers. Generalisasi invers merupakan perluasan dari konsep invers matriks, dimana invers matriks tidak lagi hanya untuk matriks yang nonsingular. Kemudian pada tahun 1955 Roger Penrose berhasil mendeskripsikan empat persamaan yang harus dipenuhi untuk menentukan generalisasi invers [2]. Persamaan tersebut dikenal sebagai persamaan Penrose.

Misalkan diberikan matriks $A \in \mathfrak{M}_{m,n}, B \in \mathfrak{M}_{p,q}, C \in \mathfrak{M}_{m,r}, D \in \mathfrak{M}_{s,q}, E \in \mathfrak{M}_{m,q}$. Selanjutnya akan ditentukan solusi dari

$$AXB + CYD = E, \tag{1.1}$$

dimana $\{1\}$-invers dari masing-masing matriks A, B, C, D memenuhi persamaan Penrose (1) $AXA = A$. Pada makalah ini akan dikaji tentang solusi X dan Y dari persamaan $AXB + CYD = E$.

2. Persamaan Penrose

Pada tahun 1955, Penrose [2] menunjukkan bahwa setiap matriks A dari elemen real atau kompleks, terdapat matriks tunggal X sehingga memenuhi empat persamaan Penrose. Persamaan inilah yang menjadi dasar adanya generalisasi invers suatu matriks. Empat persamaan Penrose tersebut adalah sebagai berikut:

(1) $AXA = A$.
(2) $XAX = X$.
(3) $(AX)^* = AX$.
(4) $(XA)^* = XA$.

dimana $A \in \mathbb{C}_{m\times n}, X \in \mathbb{C}_{n\times m}$, dan A^* adalah konjugat transpose dari matriks A. Generalisasi invers X yang memenuhi keempat persamaan Penrose dinamakan dengan Invers Moore-Penrose dan dinotasikan dengan $X = A^\dagger$ [1].

Teorema 2.1. [2] *Jika $A \in \mathbb{C}_{n\times n}$ matriks nonsingular, maka $A^\dagger = A^{-1}$.*

Definisi 2.2. [2] *Misalkan $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dan $X \in \mathbb{C}_{n\times m}$, matriks X disebut $\{1\}$ -invers dari matriks A jika memenuhi persamaan $AXA = A$ dan selanjutnya dinotasikan dengan $X \in A\{1\}$ atau $A^{(1)}$.*

Lema 2.3. [2] *Misalkan $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$. Maka*

(1) $A^{(1)}A = I_n$ jika dan hanya jika rank $\left(A^{(1)}A\right) = n$.
(2) $AA^{(1)} = I_m$ jika dan hanya jika rank $\left(AA^{(1)}\right) = m$.

3. Eksistensi dan Konstruksi dari 1-invers

Teorema 3.1. [2] *Misalkan $A \in \mathbb{C}_{m\times n}$ dengan $rank(A) = r$, $\mathfrak{E} \in \mathbb{C}_{m\times m}$ dan $P \in \mathbb{C}_{n\times n}$ merupakan matriks nonsingular sedemikian sehingga*

$$\mathfrak{E}AP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix},$$

dimana $K \in \mathbb{C}_{r\times(n-r)}$, maka $\{1\}-$invers dari A dapat dibentuk dari matriks partisi berikut ini

$$A^{(1)} = P \begin{bmatrix} I_r & 0_{(r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)} \times r & L \end{bmatrix} \mathfrak{E},$$

dengan $L \in \mathbb{C}_{(n-r)\times(m-r)}$

Bukti. Misalkan $P \in \mathbb{C}_{n\times n}$ dan $\mathfrak{E} \in \mathbb{C}_{m\times m}$ keduanya merupakan matriks nonsingular, maka terdapat $P^{-1} \in \mathbb{C}_{n\times n}$ sedemikian sehingga $P^{-1}P = PP^{-1} = I_n$ dan $\mathfrak{E}^{-1} \in \mathbb{C}_{m\times m}$ sedemikian sehingga $\mathfrak{E}^{-1}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{E}^{-1} = I_m$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}AP &= \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \\ \mathfrak{E}^{-1}\mathfrak{E}APP^{-1} &= \mathfrak{E}^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\ (\mathfrak{E}^{-1}\mathfrak{E})A(PP^{-1}) &= \mathfrak{E}^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\ A &= \mathfrak{E}^{-1} \begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan $A^{(1)}$ merupakan $\{1\}-$ invers dari A. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
AA^{(1)}A &= \mathfrak{E}^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)} \times r & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1}P \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & L \end{bmatrix} \mathfrak{E} \\
& \mathfrak{E}^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)} \times r & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= \mathfrak{E}^{-1}\begin{bmatrix} I_r & K \\ 0_{(m-r)} \times r & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} P^{-1} \\
&= A.
\end{aligned}
$$

□

4. Solusi dari Sistem Linier

Pada bagian ini, akan dijelaskan dua sifat yang digunakan untuk memperoleh dua hasil yang diketahui pada persamaan matriks linier yang mana turunannya relevan dengan hasil akhir dalam bahasan kajian ini.

Lema 4.1. [2] *Misalkan $A \in \mathfrak{M}_{m,n}, B \in \mathfrak{M}_{p,q}$, dan $C \in \mathfrak{M}_{m,q}$, maka persamaan*

$$AXB = C, \tag{4.1}$$

adalah konsisten (punya solusi) jika dan hanya jika untuk suatu $A^{(1)}$ dan $B^{(1)}$ berlaku:

$$AA^{(1)}CB^{(1)}B = C, \tag{4.2}$$

atau ekivalen dengan

$$AA^{(1)}C = C \text{ dan } CB^{(1)}B = C. \tag{4.3}$$

Jika persamaan (4.2) *dan* (4.3) *berlaku, maka representasi dari solusi umumnya adalah*

$$X = A^{(1)}CB^{(1)} + U - A^{(1)}AUBB^{(1)}, \tag{4.4}$$

dengan $U \in \mathfrak{M}_{n,p}$

Bukti. Andaikan X memenuhi persamaan $AXB = C$. Maka

$$
\begin{aligned}
C &= AXB \\
&= AA^{(1)}AXBB^{(1)}B, \\
&= AA^{(1)}CB^{(1)}B.
\end{aligned}
$$

Sebaliknya, jika $C = AA^{(1)}CB^{(1)}B$ maka $A^{(1)}CB^{(1)}$ adalah solusi yang memenuhi persamaan $AXB = C$.
Selanjutnya akan ditentukan solusi umum dari persamaan (4.1). Jika $AXB = 0$ maka terdapat $X_0 = U - A^{(1)}AUBB^{(1)}$ yang merupakan solusi khusus dari $AXB = 0$. Karena $X = A^{(1)}CB^{(1)}$ dan $X_0 = U - A^{(1)}AUBB^{(1)}$ maka

$$
\begin{aligned}
X &= X + X_0, \\
&= A^{(1)}CB^{(1)} + U - A^{(1)}AUBB^{(1)}.
\end{aligned}
$$

Sehingga untuk setiap matriks X yang memenuhi persamaan (4.1) representasi solusi umum diperoleh

$$X = A^{(1)}CB^{(1)} + U - A^{(1)}AUBB^{(1)},$$

dengan variabel sebarang $U \in \mathfrak{M}_{n,p}$. □

Lema 4.2. [3] *Misalkan* $A_1 \in \mathfrak{M}_{m_1,n}, B_1 \in \mathfrak{M}_{p,q_1}, C_1 \in \mathfrak{M}_{m_1,q_1}, A_2 \in \mathfrak{M}_{m_2,n}, B_2 \in \mathfrak{M}_{p,q_2}$, *dan* $C_2 \in \mathfrak{M}_{m_2,q_2}$ *dan misalkan masing-masing persamaan*

$$A_1XB_1 = C_1 \text{ dan } A_2XB_2 = C_2, \tag{4.5}$$

menjadi konsisten (punya solusi). Maka solusi umum untuk persamaan ini ada jika dan hanya jika

$$AA_1^{(1)}C_1B_1^{(1)}B = AA_2^{(1)}C_2B_2^{(1)}B, \tag{4.6}$$

untuk beberapa g-invers $A_1^{(1)}, B_1^{(1)}, A_2^{(1)}$ *dan* $B_2^{(1)}$ *dan untuk beberapa matriks* A *dan* B *sedemikian sehingga*

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) \text{ dan } \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(B_1) \cap \mathcal{C}(B_2).$$

dengan $\mathcal{R}(A)$ *menyatakan ruang baris* A *dan* $\mathcal{C}(B)$ *menyatakan ruang kolom* B.

5. Solusi Untuk Persamaan Matriks $AXB + CYD = E$

Teorema 5.1. [4] *Misalkan* $A \in \mathfrak{M}_{m,n}, B \in \mathfrak{M}_{p,q}, C \in \mathfrak{M}_{m,r}, D \in \mathfrak{M}_{s,q}$ *dan* $E \in \mathfrak{M}_{m,q}$. *Persamaan*

$$AXB + CYD = E, \tag{5.1}$$

konsisten (punya solusi) jika dan hanya jika persamaan berikut berlaku:

$$\left(I - AA^{(1)}\right)(E - CYD) = 0 \tag{5.2}$$

dan

$$(E - CYD)\left(I - BB^{(1)}\right) = 0. \tag{5.3}$$

Bukti. ($\Rightarrow$) Diketahui $AXB + CYD = E$ konsisten. Akan dibuktikan

$$\left(I - AA^{(1)}\right)(E - CYD) = 0,$$
$$(E - CYD)\left(I - B^{(1)}B\right) = 0.$$

Diberikan persamaan

$$AXB + CYD = E,$$
$$AXB = E - CYD, \tag{5.4}$$

dimana matriks $A \in \mathfrak{M}_{m,n}, B \in \mathfrak{M}_{p,q}, C \in \mathfrak{M}_{m,r}, D \in \mathfrak{M}_{s,q}$ adalah sebarang matriks dengan ukuran tertentu. Karena $AXB + CYD = E$ konsisten, maka terdapat

X sebarang solusi yang memenuhi persamaan (5.4). Jika X memenuhi persamaan Penrose (1), maka

$$AA^{(1)}AXBB^{(1)}B = E - CYD.$$

Karena $AXB = E - CYD$, maka

$$\begin{aligned} AA^{(1)}AXBB^{(1)}B &= E - CYD, \\ AA^{(1)}\left(E - CYD\right)B^{(1)}B &= E - CYD. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Berdasarkan Lema 4.1, persamaan (5.5) ekivalen dengan

$$AA^{(1)}\left(E - CYD\right) = E - CYD, \tag{5.6}$$

$$\left(E - CYD\right)B^{(1)}B = E - CYD. \tag{5.7}$$

Sehingga dapat ditulis

$$\begin{aligned} \left(I - AA^{(1)}\right)\left(E - CYD\right) &= 0, \\ \left(E - CYD\right)\left(I - B^{(1)}B\right) &= 0. \end{aligned}$$

Jika $AXB + CYD = E$ konsisten maka $\left(I - AA^{(1)}\right)\left(E - CYD\right) = 0$ dan $\left(E - CYD\right)\left(I - B^{(1)}B\right) = 0$.
($\Leftarrow$) Diketahui

$$\begin{aligned} \left(I - AA^{(1)}\right)\left(E - CYD\right) &= 0, \\ \left(E - CYD\right)\left(I - B^{(1)}B\right) &= 0. \end{aligned}$$

Akan dibuktikan $AXB + CYD = E$ konsisten. Pandang persamaan (5.2).

$$\begin{aligned} \left(I - AA^{(1)}\right)\left(E - CYD\right) &= 0, \\ E - CYD - AA^{(1)}E + AA^{(1)}CYD &= 0, \\ E - CYD - AA^{(1)}\left(E - CYD\right) &= 0, \\ AA^{(1)}\left(E - CYD\right) &= E - CYD. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Pandang persamaan (5.3)

$$\begin{aligned} \left(E - CYD\right)\left(I - B^{(1)}B\right) &= 0, \\ E - EB^{(1)}B - CYD + CYDB^{(1)}B &= 0, \\ E - CYD - EB^{(1)}B + CYDB^{(1)}B &= 0, \\ E - CYD - \left(EB^{(1)}B - CYDB^{(1)}B\right) &= 0, \\ \left(E - CYD\right)B^{(1)}B &= E - CYD. \end{aligned}$$

Berdasarkan Lema 4.1, persamaan (5.8) dan (5.9) dapat ditulis dalam bentuk

$$AA^{(1)}\left(E - CYD\right)B^{(1)}B = E - CYD.$$

Karena $AA^{(1)}\left(E-CYD\right)B^{(1)}B = E{-}CYD$, maka terdapat $A^{(1)}\left(E-CYD\right)B^{(1)}$ yang memenuhi persamaan. Misalkan $X = A^{(1)}\left(E-CYD\right)B^{(1)}$, maka

$$\begin{aligned} AA^{(1)}\left(E-CYD\right)B^{(1)}B &= E-CYD, \\ AXB &= E-CYD, \\ AXB+CYD &= E. \end{aligned}$$

Sehingga, untuk $AA^{(1)}\left(E-CYD\right)B^{(1)}B = E-CYD$ yang memenuhi persamaan $AXB = E-CYD$ terdapat sebarang solusi $X = A^{(1)}\left(E-CYD\right)B^{(1)}$.
Jadi, jika $\left(I-AA^{(1)}\right)(E-CYD) = 0$ dan $(E-CYD)\left(I-B^{(1)}B\right) = 0$ terpenuhi maka $AXB+CYD = E$ konsisten (punya solusi). □

Selanjutnya untuk menentukan solusi dari Y, misalkan persamaan (5.2) dan persamaan (5.3) sebagai berikut:

$$G = (I-AA^{(1)})C, \tag{5.9}$$

$$H = D(I-B^{(1)}B), \tag{5.10}$$

Berdasarkan persamaan (5.10) dapat ditulis

$$GYD = \left(I-AA^{(1)}\right)E, \tag{5.11}$$

dan berdasarkan persamaan (5.10) dapat ditulis

$$CYH = E\left(I-B^{(1)}B\right). \tag{5.12}$$

Selanjutnya, berdasarkan Lema (4.1), persamaan (5.1) mempunyai solusi jika dan hanya jika

$$GG^{(1)}\left(I-AA^{(1)}\right)ED^{(1)}D = \left(I-AA^{(1)}\right)E, \tag{5.13}$$

$$CC^{(1)}E\left(I-B^{(1)}B\right)H^{(1)}H = E\left(I-B^{(1)}B\right). \tag{5.14}$$

Berdasarkan Lema (4.2) maka persamaan (5.13) dan (5.14) dapat ditulis

$$GG^{(1)}\left(I-AA^{(1)}\right)ED^{(1)}D = CC^{(1)}E\left(I-B^{(1)}B\right)H^{(1)}H' \tag{5.15}$$

Misalkan matriks $G, C = L$ dan matriks $D, H = M$ maka

$$LG^{(1)}\left(I-AA^{(1)}\right)ED^{(1)}M = LC^{(1)}E\left(I-B^{(1)}B\right)H^{(1)}M, \tag{5.16}$$

dimana L dan M dalam persamaan (5.16) adalah beberapa matriks sedemikian sehingga

$$\mathcal{R}(L) = \mathcal{R}(G)\cap\mathcal{R}(C)$$

dan

$$\mathcal{C}(M) = \mathcal{C}(D)\cap\mathcal{C}(H).$$

Tetapi dari persamaan (5.10) dan persamaan (5.10), terlihat bahwa $\mathcal{R}(G)\subset\mathcal{R}(C)$ dan $\mathcal{C}(H)\subset\mathcal{C}(D)$ dengan demikian G dan H merepresentasikan L dan M. Sehingga jelas bahwa kondisi (5.16) adalah implikasi dari kondisi (5.13) dan (5.14). Untuk menyimpulkan kriteria solusi yang ekivalen seperti persamaan (4.2) dan persamaan (4.3) dalam Lema (4.1), sehingga kondisi (5.13) dan (5.14) dapat diganti dengan 4 kondisi sederhana berikut :

$$\left(I - GG^{(1)}\right)\left(I - AA^{(1)}\right)E = 0, \tag{5.17}$$

$$\left(I - AA^{(1)}\right)E\left(I - D^{(1)}D\right) = 0, \tag{5.18}$$

$$\left(I - CC^{(1)}\right)E\left(I - B^{(1)}B\right) = 0, \tag{5.19}$$

$$E\left(I - B^{(1)}B\right)\left(I - H^{(1)}H\right) = 0. \tag{5.20}$$

Andaikan persamaan (5.1) konsisten, maka kondisi (5.13) dan (5.14) ekivalen dengan kondisi (5.17) - (5.20) adalah terpenuhi. Terlihat dari Lema (4.1), yang merepresentasikan solusi umum untuk (5.11) yaitu :

$$Y = G^{(1)}\left(I - AA^{(1)}\right)ED^{(1)} + T - G^{(1)}GTDD^{(1)}, \tag{5.21}$$

dimana $T \in \mathfrak{M}_{r,s}$. Selanjutnya, dengan menerapkan Lema 4.1 pada persamaan (5.4) diperoleh representasi solusi umum X yaitu:

$$X = A^{(1)}(E - CYD)B^{(1)} + Z - A^{(1)}AZBB^{(1)}, \tag{5.22}$$

dimana $Z \in \mathfrak{M}_{n,p}$.

Diperoleh solusi untuk persamaan matriks $AXB + CYD = E$ adalah:

$$X = A^{(1)}(E - CYD)B^{(1)} + Z - A^{(1)}AZBB^{(1)}, \tag{5.23}$$

dimana $Z \in \mathfrak{M}_{n,p}$.

$$Y = G^{(1)}\left(I - AA^{(1)}\right)ED^{(1)} + T - G^{(1)}GTDD^{(1)}, \tag{5.24}$$

dimana $T \in \mathfrak{M}_{r,s}$.

6. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan dalam makalah ini, yaitu mengenai solusi untuk persamaan matriks $AXB + CYD = E$, maka kesimpulan yang dapat diambil adalah:

(1) Generalisasi invers merupakan perluasan dari konsep invers dimana invers matriks tidak hanya dimiliki oleh matriks nonsingular.

(2) Penentuan solusi untuk persamaan matriks $AXB + CYD = E$ memiliki tahapan sebagai berikut:

  (a) Menentukan $\{1\}$-invers dari masing-masing matriks $A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}, D^{(1)}$.

  (b) Agar persamaan konsisten (punya solusi), periksa apakah $\{1\}$-invers dari masing-masing matriks memenuhi persamaan (5.2) dan (5.3).

  (c) Jika memenuhi persamaan (5.2) dan (5.3), tentukan solusi matriks X dan matriks Y

$$X = A^{(1)}CB^{(1)} + U - A^{(1)}AUBB^{(1)}, \tag{6.1}$$

dimana $U \in \mathfrak{M}_{n,p}$.

$$Y = G^{(1)}\left(I - AA^{(1)}\right)ED^{(1)} + T - G^{(1)}GTDD^{(1)}, \tag{6.2}$$

dimana $T \in \mathfrak{M}_{r,s}$.

(d) Substitusikan matriks X dan matriks Y yang diperoleh ke persamaan $AXB + CYD = E$,

(3) Dari tahapan yang dilakukan, terbukti bahwa hasil dari matriks $AXB + CYD$ adalah matriks E.

Daftar Pustaka

[1] Anton, H. 1997. *Aljabar Linier Elementer*, Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta

[2] Ben, A. I. dan T.N.E. Geville. 2003. *Generalized Inverses Theory and Applications*, Second Edition. Springer-Verlag, New York

[3] Mitra, S.K. 1973. Common solutions to a pair of linear matrix equations $A_1XB_1 = C_1$ dan $A_2XB_2 = C_2$. *Proc. Cambridge Philos. Soc* **74**: 213 – 216

[4] J.K. Baksalary dan R. Kala. 1980. The matrix equation $AXB + CYD = E$. *Linear Algebra and Appl.* **30** : 141 – 147