Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **2** Hal. 204 – 211
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

g-INVERS KUADRAT TERKECIL, g-INVERS NORM MINIMUM, dan INVERS MOORE PENROSE

SRI RAHAYU NINGSIH, NOVA NOLIZA BAKAR, MONIKA RIANTI HELMI
Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia.
email : srningsih22@gmail.com

Abstrak. Generalisasi invers (g-invers) adalah salah satu jenis invers matriks. Tidak hanya pada matriks biasa, g-invers juga berlaku pada matriks *fuzzy.* Untuk setiap matriks *fuzzy* A berukuran $m \times n$, terdapat matriks $X \in F_{nm}$ sehingga memenuhi beberapa persamaan Penrose. Matriks $X \in F_{nm}$ dikatakan g-invers dari A, jika X minimal memenuhi persamaan yang pertama dari persamaan Penrose yaitu $AXA = A$ dengan menggunakan operasi penjumlahan dan perkalian pada matriks *fuzzy.* Pada jurnal ini dibahas bagaimana sifat-sifat dari g-invers kuadrat terkecil, g-invers norm minimum, dan invers Moore Penrose pada matriks *fuzzy.*

Kata Kunci: Generalisasi invers, matriks *fuzzy*, persamaan Penrose, matriks regular,g-invers kuadrat terkecil, g-invers norm minimum, dan invers Moore Penrose

1. Pendahuluan

Matriks dan operasinya merupakan hal yang erat kaitannya dengan bidang aljabar linier. Konsep dari suatu matriks sangat berguna untuk menyelesaikan permasalahan dalam ilmu matematika modern, salah satunya adalah penyelesaian permasalahan dengan menggunakan konsep invers matriks. Matriks *fuzzy* adalah matriks yang entri-entrinya bilangan yang berada pada selang tutup $[0, 1]$.

Pada tahun 1920 E.H Moore mendeskripsikan salah satu jenis invers matriks yang dikenal dengan nama generalisasi invers. Generalisasi invers (g-invers) merupakan perluasan dari konsep invers matriks. Kemudian pada tahun 1955 Roger Penrose berhasil mendeskripsikan empat persamaan yang harus dipenuhi untuk menentukan g-invers. Persamaan tersebut dikenal dengan nama persamaan Penrose [1]. Tidak hanya pada matriks biasa, g-invers juga berlaku pada matriks *fuzzy.* Matriks *fuzzy* yang memiliki g-invers disebut matriks *fuzzy* regular. Pada paper ini akan dibahas bagaimana sifat-sifat g-invers kuadrat terkecil, g-invers norm minimum, dan invers Moore Penrose pada matriks *fuzzy.*

2. Tinjauan Teori

Berikut adalah beberapa definisi dan materi dasar pada matriks *fuzzy.*

Definisi 2.1. [4] *Matriks* $A = [a_{ij}]$ *dikatakan matriks* fuzzy *jika* $a_{ij} \in [0,1]$.

Definisi 2.2. [4] *Misalkan matriks fuzzy* $A = [a_{ij}]$ *dan* $B = [b_{ij}]$. *Matriks* $A \geq B$ *jika* $a_{ij} \geq b_{ij}$ *dan* $A \leq B$ *jika* $a_{ij} \leq b_{ij}$, $\forall$ i,j.

Definisi 2.3. [2] *Untuk* $A \in F_{mn}$, *transpos dari A diperoleh dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A, dan dilambangkan dengan* A^T.

Definisi 2.4. [4] *Misalkan A,B, dan C suatu matriks fuzzy, dengan* $A = [a_{ij}]$ *berukuruan* $n \times p$, $B = [b_{ij}]$ *berukuran* $m \times n$, $C = [c_{ij}]$ *berukuran* $n \times p$, *dan* $k \in [0, 1]$. *Didefinisikan operasi sebagai berikut:*

(1) $A + C = (\max\{a_{ij}, c_{ij}\})$.
(2) $kA = (\min\{k, a_{ij}\})$.
(3) $BC = (\sum_{k=1}^{p} b_{ik}\ c_{kj}) = (\max\{\min\{b_{ik}, c_{kj}\}\})$.
(4) $A^T = (a_{ji})$ *(transpose dari A).*

Teorema 2.5. [2] *Misalkan* $A, B \in F_{mn}$, *maka berlaku:*

(1) $(A^T)^T = A$.
(2) $(AB)^T = B^T A^T$.

Definisi 2.6. [2] *Ruang baris dari matriks A yang berukuran* $m \times n$, *ditulis* $R(A)$ *adalah subruang dari* V_n *yang dibangun oleh baris-baris dari A. Ruang kolom dari matriks A yang berukuran* $m \times n$, *ditulis* $C(A)$ *adalah subruang dari* V_n *yang dibangun oleh kolom-kolom dari A, dan* $C(A) = R(A^T)$.

Proposisi 2.7. [2] *Misalkan A dan B adalah matriks fuzzy berukuran* $m \times n$, *maka berlaku:*

(1) $R(B) \subseteq R(A)$ *jika dan hanya jika* $B = XA$ *untuk suatu matriks* $X \in F_{mm}$.
(2) $C(B) \subseteq C(A)$ *jika dan hanya jika* $B = AY$ *untuk suatu matriks* $Y \in F_{nn}$.

Invers Matriks *Fuzzy*

Generalisasi invers (g-invers) adalah salah satu jenis invers matriks. Tidak hanya pada matriks biasa, g-invers juga berlaku pada matriks *fuzzy*. Untuk setiap matriks *fuzzy* A berukuran $m \times n$, terdapat matriks $X \in F_{nm}$ sehingga memenuhi beberapa persamaan Penrose yaitu:

(1) $AXA = A$.
(2) $XAX = X$.
(3) $(AX)^T = AX$.
(4) $(XA)^T = XA$.

Matriks $X \in F_{nm}$ dikatakan g-invers dari A, jika X minimal memenuhi persamaan yang pertama dari persamaan Penrose yaitu $AXA = A$ dengan menggunakan operasi penjumlahan dan perkalian pada matriks *fuzzy*.

Berikut adalah definisi dan teorema invers pada matriks *fuzzy*.

Definisi 2.8. [2] *Misal* A^- *adalah suatu g-invers dari A, matriks A adalah regular jika memenuhi* $AA^-A = A$

Teorema 2.9. [2] *Misalkan $A \in F_{mn}$ adalah matriks* fuzzy *regular, X adalah g-invers dari A, maka $R(A) = R(XA)$, dan $C(A) = C(AX)$.*

Teorema 2.10. [2] *Jika $A \in F_{mn}$ dengan $R(A) = R(A^TA)$, maka A^TA adalah matriks* fuzzy *regular jika dan hanya jika A adalah matriks* fuzzy *regular. Jika $A \in F_{mn}$ dengan $C(A) = C(AA^T)$, maka AA^T adalah matriks* fuzzy *regular jika dan hanya jika A adalah matriks* fuzzy *regular.*

Definisi 2.11. [2] *Untuk $A \in F_{mn}$, jika terdapat $X \in F_{nm}$ sedemikian sehingga $AXA = A$ dan $XAX = X$, maka X disebut invers semi atau $\{1, 2\}$ invers dari A.*

Himpunan $\{1, 2\}$ invers dari A dilambangkan sebagai $A\{1, 2\}$.

Teorema 2.12. [2] *Misalkan $A \in F_{mn}$, $Y, Z \in A\{1\}$ dan $X = YAZ$, maka $X \in A\{1, 2\}$.*

3. g-Invers Kuadrat Terkecil, g-Invers Norm Minimum, dan Invers Moore Penrose

Pada bagian ini, akan dibahas bagaimana sifat-sifat dari g-invers kuadrat terkecil, g-invers norm minimum, dan invers Moore Penrose pada matriks *fuzzy*.

3.1. *g-Invers Kuadrat Terkecil*

Definisi 3.1. [2] *Untuk $A \in F_{mn}$, suatu matriks $G \in F_{nm}$ dikatakan $\{1, 3\}$ invers dari A atau g-invers kuadrat terkecil dari A jika $AGA = A$ dan $(AG)^T = (AG)$.*

Teorema 3.2. [2] *Untuk $A \in F_{mn}$, A mempunyai $\{1, 3\}$ invers jika dan hanya jika A^TA adalah matriks* fuzzy *regular dan $R(A^TA) = R(A)$.*

Bukti. ($\Rightarrow$) Misal $A \in F_{mn}$, dan A mempunyai $\{1, 3\}$ invers, akan ditunjukkan A^TA adalah matriks *fuzzy* regular dan $R(A^TA) = R(A)$.
Misal A mempunyai $\{1, 3\}$ invers X, berarti:

$$AXA = A \text{ dan } (AX)^T = AX \text{ (Definisi 3.1)},$$

sehingga A regular, maka:

$$\begin{aligned} A^T(AXA) &= A^TA \\ (A^TAX)A &= A^TA, \end{aligned} \tag{3.1}$$

sehingga berdasarkan Proposisi 2.7 diperoleh $R(A^TA) \subseteq R(A)$. Selanjutnya,

$$\begin{aligned} (AX)^TA &= AXA \\ X^TA^TA &= A \\ X^T(A^TA) &= A, \end{aligned} \tag{3.2}$$

sehingga berdasarkan Proposisi 2.7 diperoleh $R(A) \subseteq R(A^TA)$. Dari persamaan (3.1) dan persamaan (3.2) diperoleh $R(A) = R(A^TA)$.

Selanjutnya, akan dibuktikan A^TA adalah regular. Sebelumnya diperoleh A regular, maka dari Teorema 2.9 diperoleh $R(A) = R(XA)$, akibatnya, $R(A^TA) = R(A) = R(XA)$. Dari persamaan (3.3) dan Proposisi 2.7 diperoleh $R(A^TA) \supseteq R(XA)$, sehingga diperoleh $XA = YA^TA$ untuk suatu matriks *fuzzy* Y.

Perhatikan bahwa untuk suatu matriks *fuzzy* Y berlaku:

$$\begin{aligned} YA^TA &= XA \\ A^TA(YA^TA) &= A^TA(XA) \\ (A^TA)Y(A^TA) &= A^T(AXA) \\ (A^TA)Y(A^TA) &= A^TA, \end{aligned}$$

sehingga dari Definisi 2.8, terbukti A^TA adalah matriks *fuzzy* regular.

($\Leftarrow$) Misal A^TA adalah matriks *fuzzy* regular dan $R(A^TA) = R(A)$. Akan ditunjukkan A mempunyai $\{1,3\}$ invers, yaitu dengan menunjukkan:

(i) $AYA = A$.
(ii) $(AY)^T = AY$, untuk suatu $Y \in F_{nm}$ (Definisi 3.1).

Dari $R(A^TA) = R(A)$ diperoleh $R(A) \subseteq R(A^TA)$, sehingga diperoleh $A = XA^TA$. Pilih $Y = (A^TA)^-A^T$, maka:

$$\begin{aligned} AYA &= (XA^TA)((A^TA)^-A^T)A \\ &= X((A^TA)(A^TA)^-(A^TA)) \\ &= X(A^TA) \quad \text{(Definisi 2.8)} \\ &= XA^TA \\ &= A, \\ AY &= (XA^TA)((A^TA)^-A^T) \\ &= (XA^TA)((A^TA)^-(A^TAX^T)) \\ &= X((A^TA)(A^TA)^-(A^TA))X^T \\ &= X(A^TA)X^T \quad \text{(Definisi 2.8)} \\ &= X(A^TAX^T) \\ &= X(XA^TA)^T \\ &= XA^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AY)^T &= (XA^T)^T \\ &= AX^T \\ &= (XA^TA)X^T \\ &= X(A^TAX^T) \\ &= X(XA^TA)^T \\ &= XA^T \\ &= AY. \end{aligned}$$

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa A mempunyai $\{1,3\}$ invers. $\square$

Teorema 3.3. [2] *Misalkan* $A \in F_{mn}$ *suatu matriks* fuzzy *regular, dengan* A^TA *adalah matriks* fuzzy *regular dan* $C(A^T) = C(A^TA)$*, maka*

$$(A^TA)^-A^T \in A\{1, 2, 3\}.$$

Bukti. Misal $A \in F_{mn}$ matriks *fuzzy* regular, dengan A^TA adalah matriks *fuzzy* regular dan $C(A^T) = C(A^TA)$, maka

$$C(A^T) \subseteq C(A^TA). \tag{3.3}$$

Akan ditunjukkan $Y = (A^TA)^-A^T \in A\{1, 2, 3\}$, yaitu dengan menunjukkan:

(i) $AYA = A$
(ii) $YAY = Y$
(iii) $(AY)^T = AY$, untuk suatu $Y \in F_{nm}$.

Dari persamaan (3.3) dan berdasarkan Proposisi 2.7 diperoleh

$$A^TAX = A^T \text{ untuk suatu } X \in F_{nm}.$$

Dengan mentransposkan kedua sisi, diperoleh:

$$A = X^TA^TA.$$

Maka:

$$\begin{aligned}
AYA &= (X^TA^TA)((A^TA)^-A^T)A \\
&= X^T((A^TA)(A^TA)^-(A^TA)) \\
&= X^T(A^TA) \quad (\text{ Definisi } 2.8) \\
&= X^TA^TA \\
&= A, \\
YAY &= Y(X^TA^TA)((A^TA)^-A^T) \\
&= Y(X^TA^TA)((A^TA)^-(A^TAX)) \\
&= YX^T((A^TA)(A^TA)^-(A^TA))X \\
&= YX^T(A^TA)X \quad (\text{ Definisi } 2.8) \\
&= Y(X^TA^TA)X \\
&= YAX
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((A^TA)^-A^T)AX \\
&= (A^TA)^-(A^TAX) \\
&= (A^TA)^-(X^TA^TA)^T \\
&= (A^TA)^-A^T \\
&= Y, \\
AY &= (X^TA^TA)((A^TA)^-A^T) \\
&= (X^TA^TA)((A^TA)^-(A^TAX)) \\
&= X^T((A^TA)(A^TA)^-(A^TA))X \\
&= X^T(A^TA)X \quad (\text{ Definisi 2.8}) \\
&= (X^TA^TA)X \\
&= AX, \\
(AY)^T &= (AX)^T \\
&= X^TA^T \\
&= X^T(A^TAX) \\
&= (X^TA^TA)X \\
&= AX \\
&= AY.
\end{aligned}$$

Dari uraian di atas terbukti bahwa $Y = (A^TA)^-A^T \in A\{1,2,3\}$. □

3.2. *g-Invers Norm Minimum*

Definisi 3.4. [2] *Untuk $A \in F_{mn}$, suatu matriks $G \in F_{nm}$ dikatakan $\{1,4\}$ invers dari A atau g-invers norm minimum dari A jika $AGA = A$ dan $(GA)^T = (GA)$.*

Akibat dari Definisi 3.1 dan Definisi 3.4, jelas bahwa $G \in A\{1,3\}$ jika dan hanya jika $G^T \in A^T\{1,4\}$.

Teorema 3.5. [2] *Untuk $A \in F_{mn}$, A mempunyai $\{1,4\}$ invers jika dan hanya jika AA^T adalah matriks* fuzzy *regular dan $C(AA^T) = C(A)$.*

Bukti. A mempunyai $\{1,4\}$ invers
$\Leftrightarrow A^T$ mempunyai $\{1,3\}$ invers
$\Leftrightarrow AA^T$ regular dan $R(AA^T) = R(A^T)$
$\Leftrightarrow AA^T$ regular dan $C(AA^T) = C(A)$
Cara pembuktiannya sama dengan Teorema 3.2. □

Teorema 3.6. [2] *Misalkan $A \in F_{mn}$ suatu matriks* fuzzy *regular, dengan AA^T adalah matriks* fuzzy *regular dan $R(A^T) = R(AA^T)$, maka $A^T(AA^T)^- \in A\{1,2,4\}$.*

Bukti. Cara pembuktian sama dengan Teorema 3.3. □

3.3. *Invers Moore Penrose*

Definisi 3.7. [2] *Untuk $A \in F_{mn}$, jika $G \in F_{nm}$ adalah $\{1,3\}$ invers dan $\{1,4\}$ invers, maka G dikatakan invers Moore Penrose dari A, dan dilambangkan sebagai A^+.*

Teorema 3.8. [2] *Misalkan $A \in F_{mn}$ adalah matriks* fuzzy *regular, maka $A^{(1,4)}AA^{(1,3)} = A^+$.*

Bukti. Misalkan $A \in F_{mn}$ adalah matriks *fuzzy* regular, akan ditunjukkan $A^{(1,4)}AA^{(1,3)} = A^+$. Misal $X = A^{(1,4)}AA^{(1,3)}$, dan berdasarkan Teorema 2.12 diperoleh $X \in A\{1,2\}$. Akan ditunjukkan:

(a) $(AX)^T = AX$.
(b) $(XA)^T = XA$.

Perhatikan bahwa :

$$\begin{aligned} AX &= A(A^{(1,4)}AA^{(1,3)}) \\ &= (AA^{(1,4)}A)A^{(1,3)} \\ AX &= AA^{(1,3)} \quad (\text{ Definisi } 2.8), \\ (AX)^T &= (AA^{(1,3)})^T \\ &= AA^{(1,3)} \quad (\text{ Definisi } 3.1) \\ (AX)^T &= AX, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $A \in \{1,3\}$ invers.

$$\begin{aligned} XA &= (A^{(1,4)}AA^{(1,3)})A \\ &= A^{(1,4)}(AA^{(1,3)}A) \\ XA &= A^{(1,4)}A \quad (\text{ Definisi } 2.8), \\ (XA)^T &= (A^{(1,4)}A)^T \\ &= A^{(1,4)}A \quad (\text{ Definisi } 3.4) \\ (XA)^T &= XA, \end{aligned}$$

sehingga diperoleh $A \in \{1,4\}$ invers. Dari uraian di atas maka terbukti bahwa $A^{(1,4)}AA^{(1,3)} = A^+$. □

Dari Teorema 3.2 dan Teorema 3.5, diperoleh teorema sebagai berikut:

Teorema 3.9. [2] *Misalkan $A \in F_{mn}$. Pernyataan-pernyataan berikut ini adalah ekivalen.*

(1) A^+ ada.
(2) AA^T dan A^TA adalah regular, $R(A^T) = R(AA^T)$, dan $C(A^T) = C(A^TA)$.
(3) A^T adalah g-invers dari A.

4. Kesimpulan

Pada tulisan ini diperoleh bagaimana sifat-sifat dari g-invers kuadrat terkecil, g-invers norm minimum, dan invers Moore Penrose pada matriks *fuzzy*.

Daftar Pustaka

[1] Ben-Israel, A and T.N.E Greville 2003. *Generalized Inverses Theory and Applications*; Second Edition. Springer-Verlag New York, Inc, USA

[2] Meenakshi, A.R. 2008. *Fuzzy Matrix Theory and Applications*, MJP Publishers, India

[3] Shyamal, A.K and M. Pal. 2004. Two New Operators On Fuzzy Matrices, *Journal Application Mathematics and Computing* **15**: 91 – 107

[4] Sidky, F.I and E.G. Enam. 1992. Some Remarks on Section of a Fuzzy Matrix, *J. K. A. U. Sci* **4** : 145 – 155