Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **2** Hal. 221 – 228
ISSN : 2303–2910

SIMULASI *QUASI MONTE CARLO* MENGGUNAKAN BARISAN *QUASI* ACAK *HALTON*

TESSY OCTAVIA MUKHTI, DODI DEVIANTO, HAZMIRA YOZZA

Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus Unand Limau Manis, Padang, Indonesia
email : tessyoctavia74@gmail.com

Abstrak. Simulasi *Monte Carlo* merupakan bentuk simulasi probabilistik dimana suatu solusi dari suatu masalah diberikan berdasarkan proses *randomisasi* (acak). Metode *Quasi Monte Carlo* merupakan metode *Monte Carlo* yang menggunakan barisan *quasi* acak sebagai pengganti dari bilangan acak. Barisan *quasi* acak yang digunakan yaitu barisan *quasi* acak *Halton* yang merupakan barisan *low discrepancy* paling dasar dalam bentuk *multiple dimensions*. Hasil simulasi dari membangkitkan barisan *quasi* acak *Halton* menggunakan Program R Studio akan memperlihatkan bahwa simulasi *Quasi Monte Carlo* menggunakan barisan *quasi* acak *Halton* dapat menyebabkan kekonvergenan simulasi menjadi lebih cepat.

Kata Kunci: Metode *Quasi Monte Carlo*, Barisan *Quasi* Acak *Halton*, *Low Discrepancy*, *Multiple Dimensions*, *R Studio*

1. Pendahuluan

Simulasi *Monte Carlo* merupakan bentuk simulasi probabilistik dimana sua-tu solusi dari suatu masalah diberikan berdasarkan proses randomisasi (acak). Proses acak ini melibatkan suatu distribusi probabilitas dari variabel data yang dikumpulkan berdasarkan data masa lalu maupun distribusi probabilitas teoritis. Metode simulasi *Monte Carlo* memiliki kemampuan untuk membentuk logika seperti operasi matematika dalam suatu model, dan juga dapat mengikuti sua-tu model untuk kemudian dikembangkan pelaksanaan dalam komputer. Dengan demikian simulasi *Monte Carlo* merupakan sebuah bagian dari algoritma komputer yang menggunakan sampel acak untuk melakukan simulasi agar mendapatkan hasil yang diinginkan. Metode simulasi *Monte Carlo* sering digunakan dalam komputasi matematika dan fisika serta bidang terapan lainnya yang berhubungan [3].

Simulasi *Monte Carlo* melibatkan penggunaan angka acak untuk memodelkan sistem, dimana waktu tidak memegang peranan yang substantif (model statis). Simulasi *Monte Carlo* digolongkan sebagai metode *sampling* karena input dibangkitkan secara acak dari suatu distribusi peluang untuk proses *sampling* dari suatu populasi. Simulasi *Monte Carlo* dilakukan dalam beberapa kali ulangan simulasi. Banyaknya ulangan simulasi dilakukan dengan melakukan bangkitan bilangan acak sebanyak simulasi. Prinsip dari simulasi *Monte Carlo* adalah penggunaan angka acak berdistribusi normal $N(0,1)$ dan Hukum Bilangan Besar [3].

Barisan *quasi* acak merupakan suatu bilangan acak yang telah memiliki pola tertentu. Perbedaan antara simulasi *Monte Carlo* dengan simulasi *Quasi Monte Carlo* adalah ketika data dibangkitkan secara berulang-ulang, barisan bilangan acak dari simulasi *Monte Carlo* akan menghasilakan data nilai yang berbeda-beda setiap pengulangan. Namun pada barisan *quasi* acak, barisan yang dihasilkan akan sama karena telah memiliki pola tersendiri. Metode *Quasi Monte Carlo* merupakan metode *Monte Carlo* yang menggunakan barisan *quasi* acak sebagai pengganti dari bilangan acak. Barisan *quasi* acak ini digunakan untuk menghasilkan sampel yang representatif dari distribusi probabilitas yang disimulasikan dalam suatu permasalahan. Barisan *quasi* acak ini pada umumnya memperbaiki kinerja dari simulasi *Monte Carlo* sehingga memberikan hasil yang lebih akurat. Terdapat beberapa barisan *quasi* acak, antara lain *Van der Corput*, *Halton*, *Faure*, dan *Sobol*.

Barisan *Halton* merupakan barisan pembeda lemah (*low discrepancy*) yang paling sederhana dengan banyak dimensi. Barisan *low discrepancy* juga dikenal sebagai barisan *quasi* acak, yang mana bilangan-bilangannnya terdistibusi acak lebih baik dalam suatu interval dari pada bilangan *Pseudo Random* yang digunakan simulasi *Monte Carlo*. [2].

Metode *low discrepancy* mampu mempercepat kekonvergenan dari laju ke-$O(1/\sqrt{n})$ berhubungan dengan *Monte Carlo* (n adalah jumlah titik yang dihasilkan) menuju mendekati kekonvergenan $O(1/n)$ pada kondisi yang tepat, *error* dari metode *Quasi Monte Carlo* adalah $O(1/n^{1-\varepsilon})$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, metode *variance reduction* hanya mempengaruhi konstanta implisit dalam $O(1/\sqrt{n})$ [2].

Simulasi *Quasi Monte Carlo* memiliki cara yang sama dengan simulasi *Monte Carlo*, dan pada metode *Quasi Monte Carlo* bilangan dibangkitkan berdasarkan barisan *Quasi* acak *Halton* dari suatu distribusi peluang untuk proses *sampling* dari suatu populasi nyata. Simulasi *Quasi Monte Carlo* dilakukan dalam beberapa kali ulangan simulasi dan beberapa dimensi dari barisan *quasi* acak *Halton*. Sehingga, akan dilihat pengaruh dari dimensi barisan *quasi* acak *Halton* terhadap kekonvergenan dari simulasi *Quasi Monte Carlo* yang disumulasikan.

2. Barisan *Quasi* Acak *Halton*

Discrepancy merupakan ukuran dari deviasi keseragaman dari barisan pada titik-titik di D ($D = [0,1]^s$). Pembangkit acak *Uniform* pada $[0,1)$ akan menghasilkan output sehingga tiap ulangan mempunyai peluang yang sama dari pembangkit titik pada subinterval yang sama, untuk contoh $[0,1/2)$ dan $[1/2,1)$ [2].

Sebelum membahas mengenai barisan *Quasi* acak *Halton*, terlebih dahulu akan dibahas mengenai barisan *Quasi* acak *Van der Corput*. Barisan *Quasi* acak *Van der Corput* adalah barisan *low discrepancy* satu dimensi yang paling sederhana dengan basis bilangan prima. Dalam [1], menjelaskan bahwa misal diberikan bilangan bulat $b > 1$, sebarang bilangan bulat n dapat dituliskan secara tunggal sebagai

$$n = a_m b^m + a_{m-1} b^{m-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

dimana koefisien $0 \leq a_k \leq (b-1)$ untuk $k = 0, 1, 2, \cdots, b-1$. Penulisan n juga dapat diganti dengan

$$n = (a_m a_{m-1} \cdots a_a a_1 a_0)_b.$$

Sehingga untuk menentukan n titik X_n dari barisan *Quasi* acak *Van der Corput* (dengan basis bilangan prima b) yaitu, langkah pertama tulis bilangan bulat n dengan basis b yaitu $n = \sum_{i=0}^{I} a_i(n)b^i$, lalu transpose digit $a_i(n)$ disekitar titik desimal untuk mendapatkan hubungan bilangan *Quasi* acak X_n dimana [4]

$$X_n = \phi_p(n) = \sum_{i=0}^{I} a_i(n)/b^{i+1}. \tag{2.1}$$

I adalah bilangan bulat terkecil yang membuat $a_i(n) = 0$ untuk semua $i > I$ $(I = \frac{\ln(n)}{\ln(p)}, n = 1, \cdots, N)$. Untuk contoh, misal $p = 3$ dan $n = 19$, dapat ditulis 19 pada basis 3 sebagai $19 = 2 * 3^2 + 0 * 3^1 + 1 * 3^0 = 201$. Ketika 201 dibalikkan menjadi 102 sehingga dapat ditentukan $X_{19} = \phi_3(19) = \frac{1}{3} + \frac{0}{9} + \frac{2}{27} = \frac{11}{27}$ yang merupakan bilangan pada interval $[0, 1]$. Barisan dengan basis 2 dimulai:

$$n = 1 \ ; 1 = 1 * 2^0 = 1, X_1 = \phi_2(1) = \frac{1}{2},$$
$$n = 2 \ ; 2 = 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = 2, X_2 = \phi_2(2) = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$
$$n = 3 \ ; 3 = 1 * 2^1 + 1 * 2^0 = 11, X_3 = \phi_2(3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$
$$n = 4 \ ; 4 = 1 * 2^2 + 0 * 2^1 + 0 * 2^0 = 100, X_4 = \phi_2(4) = \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \cdots.$$

Setelah setiap $N = 2^n - 1$ titik, barisan menyebar secara maksimal [4].

Barisan *quasi* acak *Halton* adalah barisan *low discrepancy* paling dasar dalam bentuk *multiple dimensions*, yang mana dapat dilihat sebagai *building block* dari barisan *low discrepancy* lainnya. Barisan *quasi* acak *Halton* adalah bentuk umum barisan berdimensi s pada satuan *hypercube* $[0, 1]^s$. Dimensi pertama dari barisan *quasi* acak *Halton* adalah barisan *Quasi* acak *Van der Corput* basis 2 dan dimensi kedua adalah barisan *Van der Corput* menggunakan basis 3. Dimensi s dari barisan *quasi* acak *Halton* adalah barisan *quasi* acak *Van der Corput* menggunakan bilangan prima ke-s sebagai basis. Basis dari barisan *quasi* acak *Van der Corput* akan membesar saat dimensi meningkat [4].

3. Simulasi *Quasi Monte Carlo* mengggunakan Barisan *Quasi* Acak *Halton*

Simulasi *Monte Carlo* merupakan suatu metode yang digunakan untuk mengevaluasi suatu model deterministik yang melibatkan bilangan acak sebagai salah satu input. Bilangan acak yang digunakan yaitu bilangan acak berdistribusi normal baku. Untuk simulasi *Quasi Monte Carlo*, bilangan acak yang digunakan diganti dengan barisan *quasi* acak. Barisan *quasi* acak yang akan digunakan untuk melakukan simulasi yaitu barisan *quasi* acak *Halton.*

Untuk memperoleh nilai-nilai pada barisan *quasi* acak *Halton*, dapat dilakukan dengan mencari nilai-nilai pada suku barisan *Van der Corput* yaitu langkah-langkah sebagai berikut:

(1) Menentukan nilai n sebagai berikut:

$$n = \sum_{i=0}^{I} a_i(n)b^i, \tag{3.1}$$

dimana n adalah suku barisan ke $1, 2, \cdots, M, a_i(n)$ merupakan suatu koefisien pada barisan yang bernilai non-negatif untk memenuhi nilai n dan b adalah basis yang merupakan bilangan prima. Ada berhingga bilangan dari $a_i(n)$ yang akan bernilai nol dan tak nol. I adalah bilangan bulat terkecil dari nilai $\dfrac{ln(n)}{ln(b)}$, $n = 1, 2, 3, \cdots, M$.

(2) Menghitung nilai fungsi ψ_b akan memetakan setiap titik$n$ ke sebuah titik pada $[0, 1)$ dengan transformasi sebagai berikut

$$\psi_b = \sum_{i=0}^{I} \frac{a_i(n)}{b^{i+1}} \tag{3.2}$$

(3) Menentukan barisan *quasi* acak *Van der Corput* dapat dinyatakan dengan

$$(\Psi_b(n)) = \psi_b(1), \psi_b(2), \psi_b(3), \cdots, \psi_b(M)$$

yang bersesuaian dengan fungsi ψ_b pada langkah 2. [3]

Sebagai contoh, cara penulisan barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis dua atau barisan *quasi* acak *Halton* dimensi satu adalah sebagai berikut. Untuk suku pertama ($n = 1$) pada barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan dengan mencari nilai konstanta $a_0(1)$ terlebih dahulu.

$$n = 1 = \sum_{i=0}^{I} a_i(n)b^i = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln b} \right\rfloor} a_i(n)b^i = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 1}{\ln 2} \right\rfloor} a_i(1)2^i = \sum_{i=0}^{0} a_i(1)2^i = a_0(1) \tag{3.3}$$

Diperoleh $a_0(1) = 1$, selanjutnya suku pertama ($n = 1$) barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan melalui persamaan sebagai berikut.

$$\psi_2(1) = \sum_{i=0}^{I} \frac{a_i(1)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln b} \right\rfloor} \frac{a_i(1)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 1}{\ln 2} \right\rfloor} \frac{a_i(1)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{0} \frac{a_i(1)}{2^{i+1}} = \frac{a_0(1)}{2^{0+1}} = \frac{1}{2} \tag{3.4}$$

Untuk suku kedua ($n = 2$) pada barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan dengan mencari nilai konstanta $a_0(2)$ dan $a_1(2)$ terlebih dahulu.

$$n = 2 = \sum_{i=0}^{I} a_i(n)b^i = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 2}{\ln 2} \right\rfloor} a_i(2)2^i = \sum_{i=0}^{0} a_i(2)2^i = a_0(2)2^0 + a_1(2)2^1 \tag{3.5}$$

Pilih $a_0(2) = 0$ dan $a_1(2) = 1$ sehingga

$$n = a_0(2)2^0 + a_1(2)2^1 = (0)(1) + (1)(2) = 2$$

Selanjutnya suku kedua ($n = 2$) barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan melalui persamaan sebagai berikut.

$$\psi_2(2) = \sum_{i=0}^{I} \frac{a_i(2)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 2}{\ln 2} \right\rfloor} \frac{a_i(2)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{1} \frac{a_i(2)}{2^{i+1}} = \frac{a_0(2)}{2^{0+1}} + \frac{a_1(2)}{2^{1+1}} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (3.6)$$

Untuk suku ketiga ($n = 3$) pada barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan dengan mencari nilai konstanta $a_0(3)$ dan $a_1(3)$ terlebih dahulu.

$$n = 3 = \sum_{i=0}^{I} a_i(n)b^i = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 3}{\ln 2} \right\rfloor} a_i(3)2^i = \sum_{i=0}^{1} a_i(3)2^i = a_0(3)2^0 + a_1(3)2^1 \quad (3.7)$$

Pilih $a_0(3) = 1$ dan $a_1(3) = 1$ sehingga

$$n = a_0(3)2^0 + a_1(3)2^1 = (1)(1) + (1)(2) = 3$$

Selanjutnya suku ketiga ($n = 3$) barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan melalui persamaan sebagai berikut.

$$\psi_2(3) = \sum_{i=0}^{I} \frac{a_i(3)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 3}{\ln 2} \right\rfloor} \frac{a_i(3)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{1} \frac{a_i(3)}{2^{i+1}} = \frac{a_0(3)}{2^{0+1}} + \frac{a_1(3)}{2^{1+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad (3.8)$$

Untuk suku keempat ($n = 4$) pada barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan dengan mencari nilai konstanta $a_0(4)$, $a_1(4)$, dan $a_2(4)$ terlebih dahulu.

$$n = 4 = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 4}{\ln 2} \right\rfloor} a_i(4)2^i = \sum_{i=0}^{2} a_i(4)2^i = a_0(4)2^0 + a_1(4)2^1 + a_2(4)2^2 \quad (3.9)$$

Pilih $a_0(4) = 0$, $a_1(4) = 0$, dan $a_2(4) = 1$ sehingga

$$n = a_0(4)2^0 + a_1(4)2^1 + a_2(4)2^2 = (0)(1) + (0)(2) + (1)(4) = 4$$

Selanjutnya suku keempat ($n = 4$) barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan melalui persamaan sebagai berikut.

$$\psi_2(4) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 4}{\ln 2} \right\rfloor} \frac{a_i(4)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{2} \frac{a_i(4)}{2^{i+1}} = \frac{a_0(4)}{2^{0+1}} + \frac{a_1(4)}{2^{1+1}} + \frac{a_2(4)}{2^{2+1}} = \frac{0}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \quad (3.10)$$

Untuk suku kelima ($n = 5$) pada barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan dengan mencari nilai konstanta $a_0(5)$, $a_1(5)$, dan $a_2(5)$ terlebih dahulu.

$$n = 5 = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 5}{\ln 2} \right\rfloor} a_i(5)2^i = \sum_{i=0}^{2} a_i(5)2^i = a_0(5)2^0 + a_1(5)2^1 + a_2(5)2^2 \quad (3.11)$$

Pilih $a_0(5) = 1$, $a_1(5) = 0$, dan $a_2(5) = 1$ sehingga

$$n = a_0(5)2^0 + a_1(5)2^1 + a_2(5)2^2 = (1)(1) + (0)(2) + (1)(4) = 5$$

Selanjutnya suku kelima ($n = 5$) barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan melalui persamaan sebagai berikut.

$$\psi_2(5) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 5}{\ln 2} \right\rfloor} \frac{a_i(5)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{2} \frac{a_i(5)}{2^{i+1}} = \frac{a_0(5)}{2^{0+1}} + \frac{a_1(5)}{2^{1+1}} + \frac{a_2(5)}{2^{2+1}} = \frac{1}{2} + \frac{0}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \quad (3.12)$$

Untuk suku keenam ($n = 6$) pada barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan dengan mencari nilai konstanta $a_0(6)$, $a_1(6)$, dan $a_2(6)$ terlebih dahulu.

$$n = 6 = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 6}{\ln 2} \right\rfloor} a_i(6)2^i = \sum_{i=0}^{2} a_i(6)2^i = a_0(6)2^0 + a_1(6)2^1 + a_2(6)2^2 \quad (3.13)$$

Pilih $a_0(6) = 0$, $a_1(6) = 1$, dan $a_2(6) = 1$ sehingga

$$n = a_0(6)2^0 + a_1(6)2^1 + a_2(6)2^2 = (0)(1) + (1)(2) + (1)(4) = 6$$

Selanjutnya suku keenam ($n = 6$) barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan melalui persamaan sebagai berikut.

$$\psi_2(6) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 6}{\ln 2} \right\rfloor} \frac{a_i(6)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{2} \frac{a_i(6)}{2^{i+1}} = \frac{a_0(6)}{2^{0+1}} + \frac{a_1(6)}{2^{1+1}} + \frac{a_2(6)}{2^{2+1}} = \frac{0}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} \quad (3.14)$$

Untuk suku ketujuh ($n = 7$) pada barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan dengan mencari nilai konstanta $a_0(7)$, $a_1(7)$, dan $a_2(7)$ terlebih dahulu.

$$n = 7 = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 7}{\ln 2} \right\rfloor} a_i(7)2^i = \sum_{i=0}^{2} a_i(7)2^i = a_0(7)2^0 + a_1(7)2^1 + a_2(7)2^2 \quad (3.15)$$

Pilih $a_0(7) = 1$, $a_1(7) = 1$, dan $a_2(7) = 1$ sehingga

$$n = a_0(7)2^0 + a_1(7)2^1 + a_2(7)2^2 = (1)(1) + (1)(2) + (1)(4) = 7$$

Selanjutnya suku ketujuh ($n = 7$) barisan *quasi* acak *Van der Corput* pada basis 2 dapat dituliskan melalui persamaan sebagai berikut.

$$\psi_2(7) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{\ln 7}{\ln 2} \right\rfloor} \frac{a_i(7)}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{2} \frac{a_i(7)}{2^{i+1}} = \frac{a_0(7)}{2^{0+1}} + \frac{a_1(7)}{2^{1+1}} + \frac{a_2(7)}{2^{2+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \quad (3.16)$$

dari Persamaan (3.3) hingga Persamaan (3.16), maka diperoleh barisan *quasi* acak *Van der Corput* basis 2 atau barisan *quasi* acak *Halton* dimensi 1 dengan $n = 7$ yang dapat dituliskan sebagai berikut

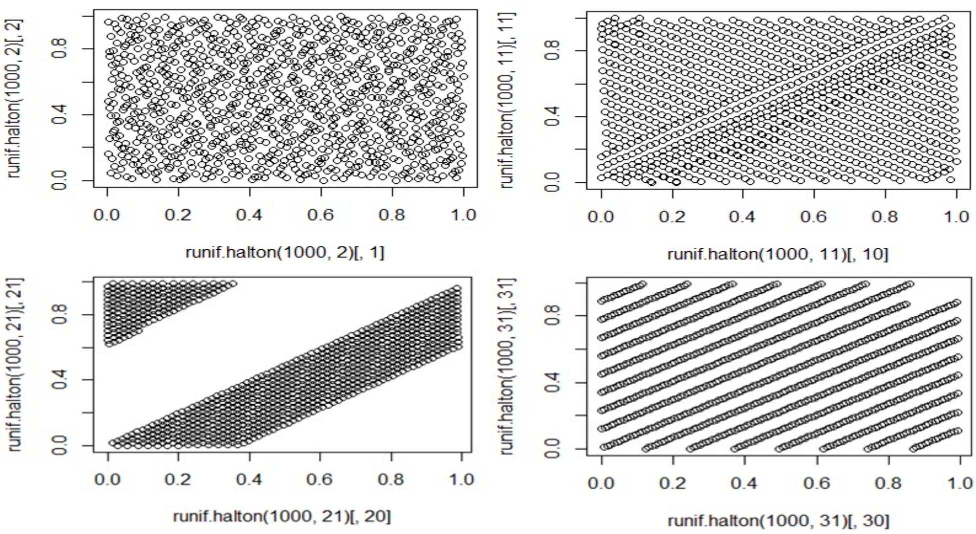
$$(\Psi_2(7)) = \psi_2(1), \psi_2(2), \psi_2(3), \cdots, \psi_b(7) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right\}$$

Untuk barisan acak *Halton* dengan dimensi yang lebih besar dapat dicari dengan cara yang sama seperti barisan *quasi* acak *Van der Corput* basis 2.

Tabel 1. Contoh Barisan *Quasi* Acak *Halton*

n.	Dimensi=1	Dimensi=2	Dimensi=3
1	1/2	1/3	1/5
2	1/4	2/3	2/5
3	3/4	1/9	3/5
4	1/8	4/9	4/5
5	5/8	7/9	1/25
6	3/8	2/9	6/25
7	7/8	5/9	11/25

Berikut ditampilkan plot dari barisan *quasi* acak *Halton* dengan beberapa simulasi dan beberapa dimensi yang dicari menggunakan Program R Studio.



Gambar 1. Contoh Plot Barisan *Quasi* Acak *Halton*

Pada Gambar 1 dapat dilihat bahwa saat simulasi 1000 kali dan dimensi yang diberikan adalah dimensi 1×2, plot data barisan masih terlihat acak dan tidak memiliki pola tertentu. Saat dimensi diperbesar menjadi dimensi 10×11, plot data barisan sudah mulai membentuk suatu pola hubungan antara dimensi 10 dan dimensi 11, dan pada saat dimensi diperbesar menjadi 20×21 dan 30×31 maka plot data terlihat hubungan yang semakin erat antar dimensi. Hal ini akan mempercepat kekonvergenan dari simulasi *Quasi Monte Carlo*.

4. Kesimpulan

Barisan *Quasi* acak yang digunakan untuk melakukan simulasi *quasi Monte Carlo* yaitu barisan *quasi* acak *Halton*. Untuk memperoleh nilai-nilai pada barisan *quasi* acak *Halton*, dapat dilakukan dengan mencari nilai-nilai pada suku barisan *Van der Corput*. Dimensi s dari barisan *quasi* acak *Halton* adalah barisan *quasi* acak *Van der Corput* menggunakan bilangan prima ke-s sebagai basis. Pada si-mulasi yang telah dilakukan menggunakan Program R Studio dengan hasil seperti pada Gambar 1, saat banyak simulasi sama namun dengan dimensi yang semakin diperbesar, maka plot data akan membentuk pola antara dimensi s dan dimensi $s+1$, sehingga dapat dikatakan bahwa simulasi menggunakan barisan *quasi* acak *Halton* dapat mencapai kekonvergenan lebih cepat untuk dimensi yang semakin membesar.

Daftar Pustaka

[1] Burton, D.M. 2007. *Elementary Number Theory*. McGraw Hill, New York.

[2] Caflisch, R.E. 1998. Monte Carlo and Quasi Monte Carlo Methods. *Acta Numerica*. **155**: 1 – 49

[3] Glesserman, P. 2010. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, United States of America.

[4] Krykova, I. 2003. *Evaluating of Path-Dependent Securities with Low Discrepancy Methods. Thesis S-2*. Worcester Polytechnic Institute