Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **4** Hal. 9 – 16
ISSN : 2303–291X
©Jurusan Matematika FMIPA UNAND

PENYELESAIAN PERSAMAAN PANAS UNTUK CINCIN LINGKAR TIPIS DENGAN METODE PEMISAHAN VARIABEL

ALFI KHAIRIATI, SUSILA BAHRI, NOVA NOLIZA BAKAR

Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email: themagani6@gmail.com

Abstrak. Dalam ilmu matematika terdapat banyak persamaan, yang banyak diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satunya adalah persamaan panas untuk cincin lingkar tipis. Dalam makalah ini membahas mengenai bagaimana penyelesaian persamaan panas untuk cincin lingkar tipis dengan metode pemisahan variabel. Dengan dibatasi kondisi batasnya hanya memakai kondisi batas periodik. Pada persamaan panas homogen dalam menyelesaikan solusinya digunakan deret Fourier sehingga didapatkan solusi persamaan panas untuk cincin lingkar tipis dengan menggunakan metode pemisahan variabel.

Kata Kunci: Persamaan Panas, Kondisi Batas Periodik, Metode Pemisahan Variabel, Deret Fourier

1. Pendahuluan

Deret Fourier diperkenalkan oleh Joseph Fourier (1768-1830) untuk memecahkan masalah persamaan panas pada lempeng logam. Persamaan panas ini merupakan persamaan diferensial parsial. Penyelesaian persamaan diferensial parsial dapat diperoleh dengan menggunakan beberapa metode salah satunya adalah metode pemisahan variabel. Persamaan panas untuk sebuah batang berbahan logam yang homogen dengan panjang L dipotong melintang sehingga potongannya berbentuk seperti cincin yang memiliki jari-jari, sudut, dan suhu. Karena suhu adalah fungsi dari dua variabel bebas, yaitu $u(x,t)$ dengan u adalah suhu, x adalah posisi, dan t adalah waktu, maka dibutuhkan persamaan diferensial parsial untuk mendekati perilaku fisika yang terjadi. Berdasarkan penjabaran di atas, perumusan masalah yang dibahas adalah bertujuan untuk memperoleh solusi persamaan panas untuk cincin lingkar tipis dengan metode pemisahan variabel. Dalam penulisan ini kondisi batas persamaan panas untuk cincin lingkar tipis yang digunakan hanyalah kondisi batas periodik sedangkan untuk kondisi batas Dirichlet, Neumann dan Robin tidak dibahas pada makalah ini.

2. LANDASAN TEORI

2.1. *Persamaan Panas [9]*

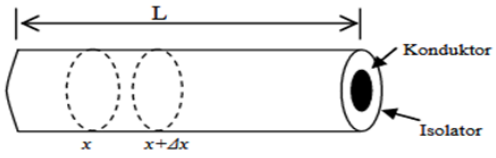
Persamaan panas adalah salah satu bentuk persamaan diferensial parsial yang dapat di tulis sebagai berikut.

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{2.1}$$

dengan $u = u(x,t)$ menyatakan distribusi suhu pada batang di titik x pada waktu t, dan α^2 adalah difusivitas termal yang mengukur kemampuan batang untuk menghantarkan panas. Difusivitas termal ditulis sebagai

$$\alpha^2 = \frac{\kappa}{\rho s} \tag{2.2}$$

dengan κ adalah besaran intensif bahan yang menunjukkan kemampuannya untuk menghantarkan panas (konduktivitas termal), ρ adalah kepadatan benda, dan s adalah panas jenis benda. Pada Gambar 1 batang logam penghantar panas yang dipasang konduktor dan isolator.



Gambar 1. Batang logam penghantar panas

2.2. *Nilai Eigen dan Fungsi Eigen [7]*

Bentuk umum dari masalah nilai batas dapat ditulis sebagai berikut.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2.3}$$

dengan kondisi - kondisi batas

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

dengan $p(x)$ dan $q(x)$ adalah kontinu pada selang $a \leq x \leq b$ dan $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ adalah konstanta real. Solusi dari persamaan (2.3) dan (2.4) selalu dipenuhi oleh $y(x) = 0$, dalam hal ini disebut solusi trivial. Nilai λ yang memenuhi $y(x) \neq 0$ disebut dengan nilai eigen dari persamaan (2.3) dan (2.4) dan solusi $y(x) \neq 0$ yang berkaitan dengan λ disebut dengan fungsi eigen dari masalah nilai batas (2.3) dan (2.4).

2.3. *Metode Pemisahan Variabel*

Metode pemisahan variabel merupakan salah satu dari beberapa metode untuk memecahkan persamaan diferensial biasa atau parsial. Misalkan kondisi awal atau batas berada dalam interval L [2],

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u,\ t > 0, -L < x < L \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

Dalam masalah ini, ada beberapa tipe kondisi batas yang umum yaitu, Kondisi batas Dirichlet, Kondisi batas Neumann, Kondisi batas Robin, dan Kondisi batas Periodik.

2.4. *Deret Fourier*

Definisi 2.4.1. [8] *Misalkan fungsi $f(x)$ periodik dengan periode $2L$. Jika fungsi ini terdefinisi pada interval $(c, c+2L)$ dengan c suatu konstanta maka fungsi ini dapat disajikan dalam bentuk deret,yaitu*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_n +1^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}) \tag{2.5}$$

dengan

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{L}\textstyle\int_c^{c+2L} f(x)dx \\ a_n &= \tfrac{1}{L}\textstyle\int_c^{c+2L} f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= \tfrac{1}{L}\textstyle\int_c^{c+2L} f(x)\sin\tfrac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Secara khusus, jika fungsi $f(x)$ didefinisikan pada interval $(-L, L)$ yaitu bersesuaian dengan $c = -L$ maka koefisien deret Fourier di atas menjadi

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{1}{L}\textstyle\int_{-L}^{L} f(x)dx \\ a_n &= \tfrac{1}{L}\textstyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\tfrac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= \tfrac{1}{L}\textstyle\int_{-L}^{L} f(x)\sin\tfrac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Teorema 2.4.2. [9] ***(Keorthogonalan Fungsi Sinus dan Fungsi Cosinus)*** *Untuk m dan n bilangan bulat positif berlaku:*

(1) $\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0,\ n \neq m \\ L,\ n = m \neq 0 \end{cases}$

(2) $\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0,\ n \neq m \\ L,\ n = m \neq 0 \end{cases}$

(3) $\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = 0$

Teorema di atas tetap berlaku meskipun interval $[-L, L]$ berubah asalkan panjang interval tetap $2L$.

2.5. *Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil*

Definisi 2.5.1. [8] *Suatu fungsi f(x) dikatakan fungsi genap, jika*

$$f(-x) = f(x), \text{untuk setiap x}$$

dan fungsi f(x) dikatakan fungsi ganjil, jika

$$f(-x) = -f(x), \text{untuk setiap x}$$

Teorema 2.5.2. [9] *Jika f(x) adalah fungsi genap atau ganjil maka akan berlaku*

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_{o}^{L} f(x)dx & ,f(x) \text{ fungsi genap} \\ 0 & ,f(x) \text{ fungsi ganjil} \end{cases}$$

Akibat 2.5.3. *Jika fungsi f(x) pada (2.5) suatu fungsi genap, maka (2.7) menjadi*

$$\begin{aligned} a_0 &= \tfrac{2}{L}\int_0^L f(x)dx \\ a_n &= \tfrac{2}{L}\int_0^L f(x)cos\tfrac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= 0, \end{aligned}$$

sehingga deret Fourier (2.5) menjadi deret Fourier cosinus

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

dan jika fungsi f(x) pada (2.5) suatu fungsi ganjil, maka (2.7) menjadi

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= 0 \\ b_n &= \tfrac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\tfrac{n\pi x}{L}dx, \end{aligned}$$

sehingga deret Fourier (2.5) menjadi deret Fourier sinus

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

3. Pembahasan

Persamaan panas yang merupakan persamaan Laplace dua variabel dalam koordinat kartesius dapat dinyatakan dengan :

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad u = u(x, y)$$

dengan u adalah suhu.

Perubahan persamaan panas dalam koordinat kartesius $u = u(x, y)$ ke koordinat polar $u = u(r, \theta)$, dapat dilakukan dengan memisalkan:

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

Turunan parsial pertama terhadap r dari u , menghasilkan:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}(\cos\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(\sin\theta)$$

Turunan parsial kedua terhadap r dari u, yaitu :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\cos^2\theta) + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(\sin^2\theta)$$

Turunan parsial pertama terhadap θ dari u, menghasilkan

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta)$$

Turunan parsial kedua terhadap θ dari u, yaitu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -r\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - r^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)$$

Kemudian akan diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}, \quad \text{dengan } \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \\
&= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \\
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{(\partial r\theta)^2}, \quad \text{dimana, } \frac{\partial^2 u}{(\partial r\theta)^2} = u_{xx}
\end{aligned}$$

Selanjutnya, distribusi panas untuk cincin lingkar tipis dapat ditentukan dengan persamaan panas yang merupakan masalah nilai awal dengan kondisi batas periodik dan kondisi awal seperti berikut:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{3.1}$$

Kondisi batas

$$u(-L,t) = u(L,t)$$

Kondisi awal

$$u(x,0) = f(x), \quad -L \le x \le L \tag{3.2}$$

dengan L adalah panjang batang penghantar panas, t adalah waktu aliran panas, x adalah posisi pada cincin, dan u adalah suhu.

3.1. *Solusi Persamaan Panas Cincin Lingkar Tipis dengan Metode Pemisahan Variabel*

Persamaan (3.1) dapat diselesaikan dengan menggunakan metode pemisahan variabel dengan terlebih dahulu memisalkan u adalah hasil kali dari dua buah fungsi yaitu:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.3}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.3), maka

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} \tag{3.4}$$

Perhatikan bahwa ruas kiri dari (3.4) hanya tergantung pada variabel x saja, sedangkan ruas kanan hanya tergantung pada variabel t saja. Kemudian dengan menyamakan persamaan (3.4) dengan suatu konstanta $-\lambda^2$ yang disebut sebagai konstanta pemisah maka diperoleh

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2 \tag{3.5}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{3.6}$$

dan

$$T' + \lambda^2\alpha^2 T = 0, \tag{3.7}$$

sehingga masalah persamaan diferensial parsial (3.1) berubah menjadi persamaan diferensial biasa. Kedua persamaan (3.6) dan (3.7) dapat ditentukan solusinya untuk sebarang nilai λ. Selanjutnya dari hasil kali solusi persamaan (3.6) dan (3.7) diperoleh solusi untuk (3.1). Masalah (3.6) bersama kondisi batas

$$X(-L) = X(L) = 0 \tag{3.8}$$

disebut masalah nilai batas sedangkan masalah (3.7) bersama kondisi awal (3.2) disebut masalah nilai awal.

Karena solusinya adalah nontrivial maka dalam kasus ini nilai eigen yang diambil adalah $\lambda > 0$. Sehingga solusi umum berbentuk

$$X(x) = c_1\cos(\lambda x) + c_2\sin(\lambda x) \tag{3.9}$$

dengan mensubtitusi kondisi batas (3.8) ke (3.9), diperoleh:

$$X(-L) = X(L)$$
$$c_1\cos(\lambda L) - c_2\sin(\lambda L) = c_1\cos(\lambda x) + c_2\sin(\lambda x)$$

$$2c_2\sin(\lambda L) = 0 \tag{3.10}$$

Agar solusi non trivial, maka untuk persamaan (3.10) $c_2 \neq 0$. $\sin(\lambda L)$, ini berarti λL adalah kelipatan bilangan bulat dari π, sebagai berikut :

$$\lambda L = n\pi$$

atau

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.11}$$

Dengan mensubtitusi (3.11) ke persamaan (3.9) diperoleh solusi khusus dari masalah nilai batas tersebut yaitu

$$X(x) = c_1\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{3.12}$$

Kemudian, dengan menyelesaikan persamaan (3.7)

$$T(t) = \exp^{-\lambda^2\alpha^2 t} \tag{3.13}$$

Selanjutnya, dengan mensubtitusikan (3.12) dan (3.13) ke (3.3) diperoleh

$$u(x,t) = \exp^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}\left(c_1\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + c_2\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right), n = 0,1,2,\cdots \tag{3.14}$$

Karena kondisi batas adalah periodik maka dengan menggunakan deret Fourier persamaan (**??**) dapat dinyatakan dengan

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2-\alpha^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} b)n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\exp^{\left(\frac{n\pi}{L}\right)-\alpha^2 t} \tag{3.15}$$

Agar kondisi awal terpenuhi

$$f(x) = u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \tag{3.16}$$

Konstanta $a_0, a_n, b_n, n = 0,1,2,\cdots$ disebut koefisien deret Fourier dan akan dicari dengan menggunakan Teorema 2.5.2 dan Akibat 2.5.3.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, maka diperoleh bahwa persamaan panas untuk cincin lingkar tipis adalah

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{(\partial r\theta)^2}$$

Selanjutnya, langkah-langkah dalam menentukan solusi dari persamaan panas untuk cincin lingkar tipis dapat disimpulkan sebagai berikut:

(1) Konstruksikan $u(x,t)$, menjadi perkalian antara fungsi posisi dan fungsi waktu, sebagai berikut:

$$u(x,t) = X(x), T(t)$$

(2) Tentukan turunan dari $u(x,t)$.
(3) Letakkan fungsi posisi dan fungsi waktu di dua sisi yang berbeda.
(4) Selanjutnya, perumusahan pada langkah (3) disamakan dengan konstanta λ^2.
(5) Substitusikan kondisi batas dan kondisi awal ke persamaan yang dihasilkan pada langkah (4), sehingga diperoleh solusi persamaan panas untuk cincin lingkar tipis.

Langkah-langkah tersebut adalah merupakan langkah-langkah dari metode pemisahan variabel.

5. Saran

Untuk penelitian selanjutnya, Penulis menyarankan untuk mengkaji persamaan panas dengan menggunakan metode yang lain seperti metode Numerov.

Daftar Pustaka

[1] Power, David L. 2006. *Boundary Value Problem and Partial Differential Equation*. Elsevier Academic Press.
[2] Pierce, Antony. 2014. *Introductory Lecture Noteson Partial Differential Equation*.
[3] Hariandja, Binsar. 2013. *Matematika Rekayasa*. ITB. Bandung.
[4] Ratna, Lily. 1992. *Persamaan Diferensial*. Erlangga. Jakarta.
[5] Anonim. Tanpa Tahun. *Laplace's Equation in The Polar*. https://www.math.ucdavis.edu/ saito/courses/21C.w11/polar-lap. diakses pada 25 September 2016.
[6] Redjeki, P Sri. 2009. *Diktat Kuliah Metoda Matematika*. ITB. Bandung.
[7] Santoso, Widiarti. 1988. *Persamaan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. Erlangga. Jakarta.
[8] Silaban, Pantur dan Hans Wospakrik. 1999. *Transformasi Laplace*. Erlangga. Jakarta
[9] Boyce, William E. dan Richard Diprima C. 1992. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems*. Rensselaer Polytechic Institute. New York.