Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **4** Hal. 17 – 21
ISSN : 2303–291X


# BILANGAN *RAINBOW CONNECTION* GRAF GARIS DARI GRAF KINCIR ($Wd_{3,n}$) DAN ($Wd_{4,n}$)

BUNGA BENDANG SARI

*Jurusan Matematika,*
*Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,*
*Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,*
*email : bunga.bendangs@yahoo.com*

**Abstrak.** Bilangan *rainbow connection* dari $G$, dinotasikan $rc(G)$, adalah minimum warna yang digunakan untuk mewarnai sisi graf $G$, dimana untuk setiap pasang titik di $G$ dihubungkan oleh sisi yang tidak berwarna sama. Dalam penelitian ini akan ditentukan bilangan *rainbow connection* graf garis dari graf Kincir ($Wd_{3,n}$) dan ($Wd_{4,n}$), dimana setiap sisi pada graf kincir menjadi titik pada graf garisnya, yang menghasilkan suatu bentuk graf baru $L(Wd_{3,n}$ dan $L(Wd_{4,n})$. Graf kincir ($Wd_{3,n}$) dengan banyak sisi $3 \times n$ dan graf kincir ($Wd_{4,n}$) dengan banyak sisi $4 \times n$, setiap graf garis dari masing-masing graf kincir ($Wd_{3,n}$) dan ($Wd_{4,n}$) memuat graf lengkap $K_{2n}$ untuk $n > 1$, dan terdapat $n$ buah $K_3$ dan $K_4$.

*Kata Kunci*: Bilangan Rainbow Connection, Graf Kincir, Graf Garis, Graf Lengkap, Graf Garis dari Graf kincir

## 1. Pendahuluan

Teori graf merupakan cabang ilmu yang perkembangannya sangat pesat. Hal ini disebabkan oleh manfaat teori graf yang sangat luas, dapat dikatakan bahwa semua cabang ilmu lain dapat memanfaatkannya. Teori graf muncul pada tahun 1735, yang diperkenalkan oleh seorang matematikawan terkenal Swiss yang bernama Leonhard Euler, sebagai representasi permasalahan jembatan Konigsberg. Permasalahan yang timbul adalah bagaimana cara seseorang berpindah dari suatu tempat ke tempat lain dengan melewati tepat satu kali untuk setiap jembatan.

Graf $G$ didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$, dimana $V(G)$ adalah suatu himpunan titik *(vertex)* dari graf $G$ dan $E(G)$ adalah suatu himpunan sisi *(edge)* dari graf $G$ yang terdiri dari pasangan terurut dari titik-titik berbeda dari $V$. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan $P$ adalah suatu lintasan dari $u$ ke $v$. Suatu lintasan $P$ dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di $P$ berwarna sama. Graf $G$ disebut *rainbow connected* dengan pewarnaan $c$ jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ terdapat *rainbow path* dari $u$ ke $v$. Jika terdapat $k$ warna di $G$ maka $c$ adalah *rainbow k-coloring. Rainbow connection number* dari graf terhubung dinotasikan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf $G$ bersifat *rainbow connected.*

Pada suatu graf terhubung $G$, hubungan $diam(G), rc(G), src(G)$ dan banyak sisi $m$, dijelaskan pada proposisi berikut.

**Proposisi 1.1.** [3] *Misalkan $G$ adalah graf terhubung tak trivial berukuran $m$. Jika $c : E(G) \to \{1, 2, \cdots, k\}, k \in \mathbb{N}$ merupakan pewarnaan* rainbow coloring*, maka*

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

## 2. Bilangan *Rainbow Connection* Graf Kincir ($Wd_{k,n}$)

Teorema berikut menyajikan bilangan *rainbow connection* untuk graf kincir $Wd_{k,n}$.

**Teorema 2.1.** [5] *Misalkan $Wd_{m,n}$ adalah graf kincir dengan $n$ buah graf lengkap $K_m$, dengan $m \geq 1$ dan $n \geq 1$ dan satu titik bersama. Bilangan rainbow connection graf kincir $Wd_{m,n}$ adalah sebagai berikut.*

$$rc(Wd_{m,n}) = \begin{cases} 1, & untuk\ n = 1, \\ 2, & untuk\ n = 2, \\ 3, & untuk\ n \geq 3. \end{cases}$$

**Bukti.** Misalkan $v_0$ adalah titik pusat $Wd_{k,n}$ dan $v_{ij}$ adalah titik-titik di graf lengkap $K_m$ ke-i, untuk $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ dan $j \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$. Akan ditentukan bilangan *rainbow connection* $Wd_{m,n}$. Jelas bahwa, $rc(Wd_{m,n}) = n$ untuk $1 \leq n \leq 2$.

Selanjutnya, akan dibuktikan $rc(Wd_{m,n}) = 3$ untuk $n \geq 3$. Karena $diam(Wd_{m,n}) = 2$ maka $rc(Wd_{m,n}) \geq diam(Wd_{m,n}) = 2$. Jadi, asumsikan $rc(Wd_{m,n}) = 2$. Akibatnya, terdapat suatu *rainbow 2-coloring* $c : E(Wd_{m,n}) \to \{1, 2\}$. Tanpa mengurangi perumuman, misalkan $c(v_0v_{11}) = 1$ dan $c(v_0v_{21}) = 2$. Jadi, $v_{11} - v_0 - v_{21}$ adalah suatu *path* dengan panjang 2 di $Wd_{m,n}$. Terdapat *rainbow path* dari $v_{11}$ sampai $v_{21}$ jika dan hanya jika $c(v_0v_{21}) = 2$. Karena itu, $rc(Wd_{m,n}) \geq 3$.

Selanjutnya, akan dibuktikan bahwa $rc(Wd_{m,n}) \leq 3$. Dalam hal ini pembuktian akan dibagi menjadi dua kasus. Berdasarkan definisi graf kincir $Wd_{m,i}$ sebelumnya, telah diberikan label untuk setiap graf lengkap dalam graf kincir tersebut, yaitu setiap titik dilabeli menurut arah jarum jam. Jadi, $K_{mi}$ adalah lambang untuk graf lengkap dengan m titik ke-i.

**Kasus 1**. Untuk $n = 3$, akan dibuktikan bahwa $rc(Wd_{m,3}) \leq 3$.
Misalkan terdapat suatu *rainbow* 3-*coloring* $c : E(Wd_{m,n}) \to \{0, 1, 2\}$. Kemudian, definisikan pewarnaan $c(E(K_{ni})) = i - 1,\ i \in \{1, 2, 3\}$. Ini berarti bahwa semua sisi dari graf lengkap ke-$i$ diwarnai dengan warna $i-1$. Oleh karena itu, $rc(Wd_{m,n}) \leq 3$.

**Kasus 2**. Untuk $n > 3$, definisikan suatu pemetaan 3-coloring $c : E(Wd_{m,n}) \to \{0, 1, 2\}$, misalkan diambil tiga diantara $n$ buah graf lengkap, yang masing-masing sisinya diwarnai $0, 1$ dan 2. Tanpa mengurangi perumuman, misal $c(Wd_{m,k}) = k - 1,\ k \in \{1, 2, 3\}$. Selanjutnya, warnai seluruh graf lengkap dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned} c(v_0v_{ij}) &= j \ mod\ 3, \\ c(v_{ij}v_{ij+1}) &= \{0, 1, 2\} - c(v_0v_{ij}) - c(v_0v_{ij+1}), \\ c(e) \in \{0, 1, 2\}\ &,\ e \in E(G) - \{v_0v_{ij}\} - \{v_{ij}v_{ij+1}\}, \end{aligned}$$

dimana $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $j \in \{1, 2, \cdots, m-1\}$. Dalam pewarnaan ini, semua sisi dari graf lengkap diberi warna paling sedikit 1 warna. Jadi, setiap graf lengkap adalah *rainbow connected.* Di samping itu, setiap lintasan dari titik $v_{i_1}j_1$ dari graf lengkap ke titik $v_{i_2}j_2$ dari graf lengkap yang lain diwarnai mengikuti tiga kondisi diatas. Ini mengakibatkan bahwa $rc(Wd_{m,n}) \leq 3$.

Jadi $rc(Wd_{m,3}) = 3$, untuk $n \geq 3$. □

## 3. Bilangan *Rainbow Connection* Graf Garis dari Graf Kincir ($Wd_{3,n}$) dan ($Wd_{4,n}$)

Teorema berikut menyajikan bilangan *rainbow connection* untuk graf garis dari graf kincir, dinotasikan $L(Wd_{k,n})$, untuk $k = 3$.

**Teorema 3.1.** ♢ *Bilangan rainbow connection dari graf garis untuk graf kincir, dinotasikan* $L(Wd_{3,n})$*, dengan* $n \geq 1$ *adalah sebagai berikut.*

$$rc(L(Wd_{3,n})) = \begin{cases} 1, \, n = 1, \\ 3, \, n \geq 2. \end{cases}$$

**Bukti.** Untuk menentukan bilangan *rainbow connection* dari $L(Wd_{3,n})$, perhatikan dua kasus berikut.

**Kasus 1**. Untuk $n = 1$, karena graf $L(Wd_{3,1}) \simeq K_3$, maka jelas bahwa $rc(L(Wd_{3,1})) = 1$.

**Kasus 2**.Untuk $n \geq 2$. Pertama-tama akan ditunjukkan batas bawah bilangan *rainbow connection* graf garis dari graf kincir untuk $n \geq 2$, yaitu $rc(L(Wd_{3,n})) \geq 3$. Karena $v_0$ titik bersama pada graf kincir $Wd_{k,n}$ maka titik $v_0$ bertetangga ke semua titik yang lain, maka terdapat graf lengkap $K_{2n}$ didalam $L(Wd_{k,n})$. Karena setiap titik $v_{i1}v_{i2}$ tidak bertetangga ke titik $v_{j1}v_{j2}$ dengan $j \neq i$, maka $diam(L(Wd_{3,2})) = 3$. Akibatnya, $rc(L(Wd_{3,n})) \geq 3$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas bilangan *rainbow connection* graf garis dari graf kincir untuk $n \geq 2$, yaitu $rc(L(Wd_{3,n})) \leq 3$. Warnai seluruh sisi graf lengkap pada graf $L(Wd_{k,n})$ dengan cara sebagai berikut :

$$c(e'_i) = \begin{cases} 1, \text{ untuk } e'_i \in E(K_{2n}) \text{ yang ada di } L(Wd_{3,n}), \\ 2, \text{ untuk } e'_i = v_0v_{ij}v_{ij}v_{ij+1}, \\ 3, \text{ untuk } e'_i = v_0v_{ij+1}v_{ij}v_{ij+1}, \end{cases}$$

dimana $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2\}$. Jadi, karena setiap lintasan terpendek $v_{ij}v_{ij+1} - v_0v_{ij} - v_0v_{ij+1} - v_{ij}v_{ij+1}$ adalah *rainbow path* dengan 3-pewarnaan maka $rc(L(Wd_{3,n})) \leq 3$ untuk $n \geq 2$. □

Teorema berikut menyajikan bilangan *rainbow connection* graf garis dari graf kincir, dinotasikan $L(Wd_{k,n})$ untuk $k = 4$.

**Teorema 3.2.** ♢ *Bilangan rainbow connection dari graf garis untuk graf kincir, dinotasikan* $L(Wd_{4,n})$ *dengan* $n \geq 1$ *adalah sebagai berikut.*

$$rc(L(Wd_{4,n})) = \begin{cases} 1, \, n = 1; \\ 3, \, n = 2; \\ 4, \, n \geq 3. \end{cases}$$

**Bukti.** Untuk menentukan bilangan *rainbow connection* dari $L(Wd_{4,n})$, perhatikan tiga kasus berikut. *Kasus 1.* Untuk $n = 1$, karena graf $L(Wd_{4,1}) \simeq K_4$, maka jelas bahwa $rc(L(Wd_{4,1})) = 1$.

*Kasus 2.* Untuk $n = 2$, karena graf $L(Wd_{4,2})$ memuat graf lengkap $K_4$, maka jelas bahwa $K_4$ diberi warna 1. Kemudian, definisikan pewarnaan $c(c_i') = i + 1$ $(i \in \{1, 2\})$. Ini berarti bahwa semua sisi pada $L(Wd_{4,2})$ yang ada diluar graf lengkap $K_4$ diwarnai dengan warna $i + 1$. Oleh karena itu, $rc(L(Wd_{4,2})) = 3$.

*Kasus 3.* Untuk $n \geq 3$. Pertama-tama akan ditunjukan batas bawah bilangan *rainbow connection* graf garis dari graf kincir untuk $n \geq 3$, yaitu $rc(L(Wd_{4,n})) \geq 4$. Karena untuk setiap titik $v_0$ bertetangga kesemua titik yang lain, kecuali ke titik $v_{i2}$ ini mengakibatkan maka terdapat graf lengkap $K_{2n}$. Karena setiap titik $v_{i1}v_{i2}$ tidak bertetangga ke titik $v_{j1}v_{j2}$ dengan $j \neq i$, maka $diam(L(Wd_{4,3})) = 3$. Karena terdapat titik $v_{i2}$ yang tidak bertetangga dengan $v_0$, akibatnya $rc(L(Wd_{4,n})) \geq 4$.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas bilangan *rainbow connection* graf garis dari graf kincir untuk $n \geq 3$, yaitu $rc(L(Wd_{4,n})) \leq 4$. Warnai seluruh graf lengkap dengan cara sebagai berikut,

$$c(e_i') = \begin{cases} 1, \text{ untuk } e_i' \in E(K_{2n}) \text{ yang ada di } L(Wd_{4,n}); \\ 2, \text{ untuk } e_i' = v_0v_{ij}v_{ij}v_{ij+1}, \\ 3, \text{ untuk } e_i' = v_0v_{ij+2}v_{ij+1}v_{ij+2}, \\ 4, \text{ untuk } e_i' = v_{ij}v_{ij+1}v_{ij+1}v_{ij+2}, \end{cases}$$

dimana $i \in \{1, 2 \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Karena lintasan terpendek $v_{ij}v_{ij+1} - v_0v_{ij} - v_0v_{ij+2} - v_{ij+1}v_{ij+2} - v_{ij}v_{ij+1}$ adalah *rainbow path* dengan 4-pewarnaan maka $rc(L(Wd_{4,n})) \leq 4$ untuk $n \geq 3$. □

## 4. Kesimpulan

Pada makalah ini telah ditentukan bilangan *rainbow connection* graf garis dari graf kincir $(Wd_{3,n})$ dan $(Wd_{4.n})$.

## 5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Prof. Dr. Dyafrizal Sy, Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Dr. Admi Nazra, Bapak Narwen, M.Si, dan Bapak Dr. Ahmad Iqbal Baqi, yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

## Daftar Pustaka

[1] Bondy, J. A. dan U. S. R. Murty. 1976. *Graph Theory with Applications*. Macmillan, London.

[2] Chartrand, G.G.L. Johns, K.A. McKeon, dan P. Zhang. 2008. *Rainbow Connection in Graph*, *Math.Bohem.* **133** : 85 – 98

[3] Chartrand, G. and Lesniak, L. 1986. *Graph and Digraph.* Edisi 2, California: Wadsworth, Inc.

[4] Li, X. and Y.Sun. 2011. Rainbow Connection Numbers of Line Graphs, *Ars Combin.*, **100** : 449 – 463

[5] Li, X. and Y. Sun. 2012. *Rainbow Connection of Graphs*. Springer Briefs in Mathematics. Springer. New York

[6] Liu, Y. and Wang, Z. 2014. The Rainbow Conection of Windmill and Corona Graph, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 8. China

[7] Sy, S., Histamedika, G., Yulianti, L. 2013. Rainbow Connection Numbers of fan and sun, *Applied Mathematical Sciences* **7**: 3155 – 3159

[8] Yuefang, S. 2013. Rainbow Connection Numbers of Line Graphs, Middle Graphs and Total Graphs, *International Journal of Applied Mathematics and Statistics* **42** (12)