Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **4** Hal. 37 – 42
ISSN : 2303–291X

PENENTUAN KELAS RAMSEY MINIMAL UNTUK $3K_2$ DAN $K_{1,3}$

EKA FERMANTIKA
Program Studi Magister Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : ekafermantika21@gmail.com

Abstrak. Pada makalah ini akan dibahas tentang syarat cukup dan perlu untuk graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$ serta akan ditentukan beberapa graf dengan 8 titik yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$.

Kata Kunci: Graf Ramsey minimal, pewarnaan-(G, H)

1. Pendahuluan

Misalkan diberikan graf G dan H sebarang. Notasi $F \rightarrow (G, H)$ menyatakan bahwa pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi graf F, senantiasa diperoleh F yang memuat subgraf merah yang isomorfik dengan G atau subgraf biru yang isomorfik dengan H. Selanjutnya, suatu *pewarnaan*-(G, H) pada graf F didefinisikan sebagai suatu pewarnaan merah-biru terhadap semua sisi graf F sedemikian sehingga F tidak memuat subgraf merah G sekaligus tidak memuat subgraf biru H.

Pada artikel ini, kita akan mengkaji kembali tentang syarat perlu dan cukup bagi graf F yang memenuhi $F \rightarrow (3K_2, H)$ dan $K_{1,n}$ untuk $n \geq 1$, seperti yang telah dibahas dalam [2]. Dengan menggunakan pendekatan komputasi, dalam [8] telah didapatkan graf dengan m titik tertentu yang menjadi anggota kelas $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,n})$ untuk $n \geq 1$. Dalam penelitian ini akan ditentukan graf dengan banyak titik ≥ 8 yang menjadi anggota kelas $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$.

Berikut adalah definisi dari graf Ramsey (G, H)-Minimal untuk graf G dan H sebarang.

Definisi 1.1. [1] *Diberikan graf G dan H. Graf F dikatakan sebagai* ***graf Ramsey*** (G, H)***-minimal*** *jika*

(1) $F \rightarrow (G, H)$,
(2) $F^* \nrightarrow (G, H)$ *untuk sebarang subgraf sejati* $F^* \subset F$.

2. Syarat Cukup dan Perlu untuk Keanggotaan $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,n})$

Pada bagian ini akan diberikan syarat cukup dan perlu bagi graf yang menjadi anggota kelas $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,n})$.

Lema 2.1. [2] *Misalkan F adalah graf dengan m titik. Maka $F \to (3K_2, K_{1,n})$ jika dan hanya jika*

(1) $F - \{v, w\} \supseteq K_{1,n}, \forall v, w \in V(F)$.
(2) $F - v - E(C_3) \supseteq K_{1,n}, \forall v \in V(F), C_3 \in F$.
(3) $F - E(2C_3) \supseteq K_{1,n}, \forall 2C_3 \in F$.
(4) $F - E(F^*) \supseteq K_{1,n}, \forall F^* \in F$, dimana F^* adalah subgraf dengan 5 titik.

Bukti. ($\Rightarrow$) Misalkan $F \to (3K_2, K_{1,n})$. Kemudian,

(1) Misalkan terdapat dua titik $v, w \in V(F)$, sedemikian sehingga $K_{1,n} \nsubseteq F - \{v, w\}$. Jika semua sisi yang terkait pada v atau w diwarnai dengan merah, sementara sisi lainnya dari F diwarnai biru, maka diperoleh suatu pewarnaan-$(3K_2, K_{1,n})$ pada F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \to (3K_2, K_{1,n})$
(2) Misalkan terdapat suatu titik $v \in V(F)$ dan suatu C_3 di F, sedemikian sehingga $K_{1,n} \nsubseteq F - v - E(C_3)$. Jika semua sisi yang terkait pada v diwarnai dengan merah dan sisi dari C_3 diwarnai dengan merah, diperoleh suatu pewarnaan-$(3K_2, K_{1,n})$ pada F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \to (3K_2, K_{1,n})$.
(3) Misalkan sifat (3) tidak berlaku untuk suatu $2C_3$ di F, sedemikian sehingga $K_{1,n} \nsubseteq F - E(2C_3)$. Jika sisi dari $2C_3$ diwarnai merah sementara sisi lainnya diwarnai biru, maka diperoleh suatu pewarnaan-$(3K_2, K_{1,n})$ pada F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \to (3K_2, K_{1,n})$.
(4) Misalkan sifat (4) tidak berlaku untuk suatu F^* di F, dengan F^* adalah subgraf dengan lima titik, sedemikian sehingga $K_{1,n} \nsubseteq F - E(F^*)$. Jika sisi dari F^* diwarnai merah sementara sisi lainnya diwarnai biru, maka diperoleh suatu pewarnaan-$(3K_2, K_{1,n})$ pada F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \to (3K_2, K_{1,n})$.

($\Leftarrow$) Sekarang kita asumsikan (1) – (4) terpenuhi. Maka terdapat 2-pewarnaan sebarang pada F yang tidak memuat $3K_2$ merah, kemudian sisi merah atau semua sisi merah membentuk salah satu subgraf berikut di F:

(a) $K_{1,s} \cup K_{1,t}$ $\forall s, t \in N$.
(b) Graf terhubung yang dibentuk dari $K_{1,s}$ dan $K_{1,t}$ dengan mengidentifikasi setidaknya satu titik masing-masing dari kedua graf tersebut.
(c) $K_{1,s} \cup C_3$ $\forall s \in N$
(d) Graf terhubung yang dibentuk dari $K_{1,s}$ dan C_3 dengan mengidentifikasi setidaknya satu titik masing-masing dari kedua graf tersebut.
(e) $2C_3$ atau
(f) Graf yang terdiri dari paling banyak 5 titik.

Keberadaan $K_{1,n}$ biru dijamin oleh asumsi (1) untuk kasus (a) dan (b), asumsi (2) untuk kasus (c) dan (d), asumsi (3) untuk kasus (e) dan asumsi (4) untuk kasus (f) $\square$

Lema 2.2. [2] *Jika $F \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,n})$, maka $n \leq \Delta(F) \leq n + 3$.*

Bukti. Jelas bahwa $n \leq \Delta(F)$. Misalkan $\Delta(F) \geq n+4$ dan terdapat $v \in V$sedemikian sehingga $d(v) = \Delta(F)$. Maka berdasarkan Lema 2.1, terdapat $w \in V(F)$ sedemikian sehingga terdapat paling sedikit n sisi yang terkait dengan w, tetapi tidak terkait dengan v di $F - v$.

lMisalkan $e = vw$ jika tidak misalkan e adalah sebarang sisi terkait dengan v. Maka dari $F \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,n})$ diperoleh pewarnaan-$(3K_2, K_{1,n})$ pada $F - e$ katakan pewarnaan tersebut dengan λ. Dalam λ terdapat paling sedikit empat sisi merah yang terkait dengan v dan paling sedikit satu sisi merah katakan e_1, dari n sisi merah terkait pada w tetapi tidak terkait dengan v.

Ambil f, g, h, i menjadi titik lain yang keempat sisinya diwarnai merah yang terkait dengan v, kita definisikan pewarnaan baru katakan $\lambda*'$, pada sisi F sedemikian sehingga sisi $\lambda *' (e)$ = merah dan $\lambda *' (x) = \lambda(x)$ untuk setiap sisi di F. Maka F harus memuat $3K_2$ merah.

Oleh karena itu, ada $2K_2$ merah di $F - e$ pada λ, dengan tidak memamasukkan tiik v. Selanjutnya keempat titik f,g,h,i harus memuat $2K_2$ merah ,jika tidak akan terdapat $3K_2$ merah pada $(3K_2, K_{1,n})$ di $F - e$ pada λ. Dengan demikian titik f,g ,h,i menjadi sisi $2K_2$ merah.

Sekarang dengan adanya e_1, terkait atau tidak terkait untuk semua f,g,h,i menyatakan $3K_2$ merah pada $F - e$ pada λ. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,n})$. □

Lema 2.3. [2] *Misalkan $F \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,n})$, maka $F - v \to (2K_2, K_{1,n}), \forall v \in V(F)$.*

Bukti. Andaikan terdapat suatu titik $v \in V(F)$ sedemikian sehingga $F - v \nrightarrow (2K_2, K_{1,n})$, maka diperoleh pewarnaan-$(2K_2, K_{1,n})$ pada $F - v$. Dengan menggunakan suatu pewarnaan-$(2K_2, K_{1,n})$ pada $F - v$, jika semua sisi yang terkait pada v di F diwarnai dengan merah, maka diperoleh pewarnaan-$(3K_2, K_{1,n})$ dari F. Hal ini bertentangan dengan asumsi bahwa $F \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,n})$. □

Berdasarkan Lema 2.1, Lema 2.2 dan Lema 2.3 diperoleh syarat cukup dan perlu untuk keanggotaan $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$, sebagai berikut.

Akibat 2.4. *Misalkan $F \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$, maka,*

(1) $F - \{v, w\} \supseteq K_{1,3}, \forall v, w \in V(F)$.
(2) $F - v - E(C_3) \supseteq K_{1,3}, \forall v \in V(F), C_3 \in F$.
(3) $F - E(2C_3) \supseteq K_{1,3}, \forall 2C_3 \in F$.
(4) $F - E(F^*) \supseteq K_{1,3}, \forall F^* \in F$, dimana F^* adalah subgraf dengan 5 titik.

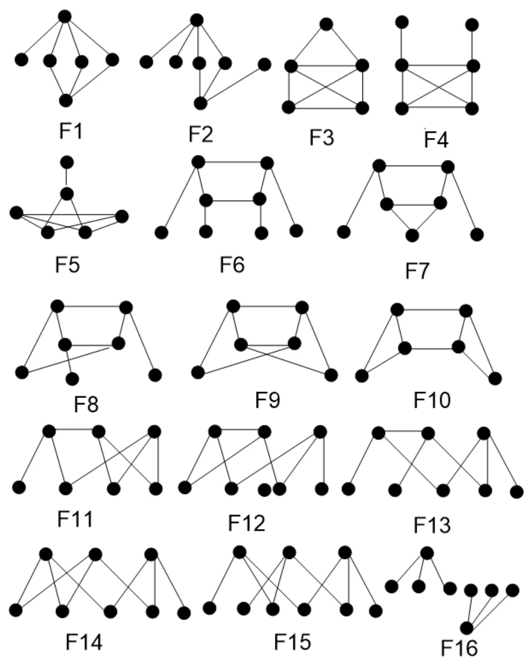
Akibat 2.5. *Jika $F \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$. Maka $n \leq \Delta(F) \leq n+3$.*

Akibat 2.6. *$F \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$. Maka $F - v \to (2K_2, K_{1,3}), \forall v \in V(F)$.*

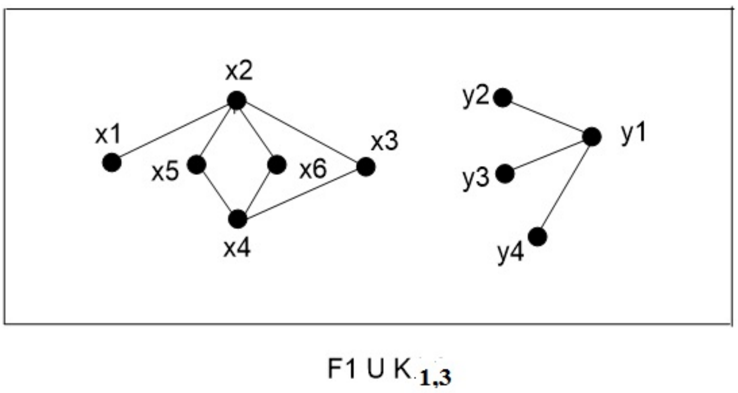
3. Anggota $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$

Berikut adalah beberapa graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$ yang berasal dari graf yang jadi anggota $\mathcal{R}(2K_2, K_{1,3})$.

Teorema 3.1. *Misalkan terdapat* $\mathcal{A} = \{F_i \mid 1 \leq i \leq 16\} \subseteq \mathcal{R}(2K_2, K_{1,3})$ *(lihat Gambar 1). Maka* $G \cup K_{1,3} \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$*, untuk* $G \in \mathcal{A}$.



Gambar 1. [2] Anggota $\mathcal{R}(2K_2, K_{1,3})$

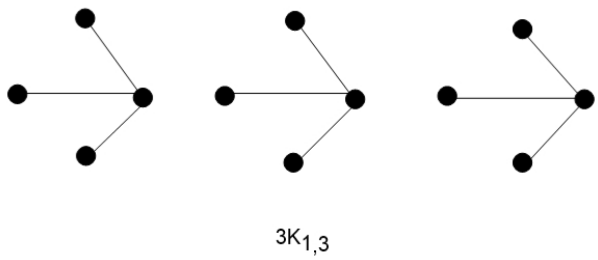


Gambar 2. Graf $F_1 \cup K_{1,3}$

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $F_1 \cup K_{1,3} \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$. Untuk graf lainnya dalam himpunan $\mathcal{A}$, pembuktian dilakukan dengan cara serupa. Akan ditunjukkan bahwa $F_1 \cup K_{1,3} \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$. Pandang sebarang pewarnaan merah biru terhadap semua sisi graf $F_1 \cup K_{1,3}$. Misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi merah berbentuk $K_{1,4}$ dan $K_{1,3}$. Untuk setiap kemungkinan tersebut selalu diperoleh $K_{1,3}$ biru. Sehingga $F_1 \cup K_{1,3} \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $(F_1 \cup K_{1,3}) - e \nrightarrow (3K_2, K_{1,3})$ untuk sebarang $e \in E(F_1 \cup K_{1,3})$. Notasikan $V(F_1 \cup K_{1,3}) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} \cup \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ dan $E(F_1 \cup K_{1,3}) = \{x_1x_2, x_2x_3, x_2x_5, x_2x_6, x_3x_4, x_4, x_5, x_4x_6 \cup y_1y_2, y_1y_3, y_1y_4\}$. Misalkan e adalah sisi x_1x_2. Maka warnai sisi $x_2x_6, x_4x_6, y_1y_2, y_1y_3, y_1y_4$ dengan merah, sementara sisi lainnya diwarnai biru sedemikian sehingga tidak diperoleh $K_{1,3}$ biru dalam pewarnaan tersebut. Sehingga diperoleh $(F_1 \cup K_{1,3}) - e \nrightarrow (3K_2, K_{1,3})$ untuk setiap $e \in (F_1 \cup K_{1,3})$. Maka $F_1 \cup K_{1,3} \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$. □

Teorema 3.2. *Satu-satunya graf dengan tiga komponen yang berada dalam* $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$ *adalah* $3K_{1,3}$.

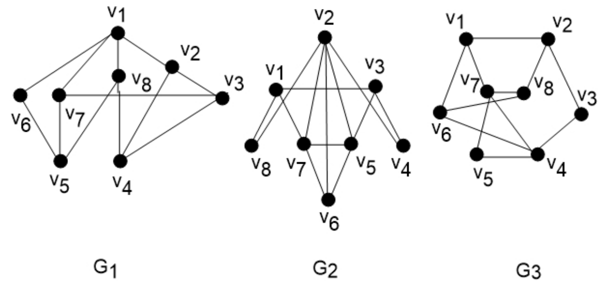


Gambar 3. $3K_{1,3} \in \mathcal{R}(3K_2, 3K_{1,3})$

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $3K_{1,3} \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$. Misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah pada sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi-sisi $3K_{1,3}$. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah berbentuk dua buah $K_{1,3}$, sementara sisi lainnya dari $3K_{1,3}$ berwarna biru. Maka diperoleh $K_{1,3}$ biru pada pewarnaan tersebut. Sebaliknya dengan cara yang sama, jika diandaikan tidak terdapat $K_{1,3}$ biru maka akan diperoleh $3K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut. Sehingga $3K_{1,3} \rightarrow \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $3K_{1,3}^* := 3K_{1,3} - e \nrightarrow (3K_2, K_{1,3})$ untuk sebarang $e \in E(3K_{1,3})$. Misalkan sisi e sebarang dihapus dari salah satu $K_{1,3}$. Maka $3K_{1,3}^*$ terdiri dari satu graf P_3 dan dua buah $K_{1,3}$. Warnai dua buah $K_{1,3}$ masing-masing sisi $K_{1,3}$ dengan merah, dan warnai dengan biru sisi-sisi yang tersisa lainnya. Maka tidak diperoleh $K_{1,3}$ biru pada pewarnaan tersebut. Terbukti bahwa $3K_{1,3} \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$. □

Teorema 3.3. *Misalkan diberikan graf* $3K_2$ *dan* $K_{1,3}$*. Maka* $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3}) \supseteq \{G_1, G_2, G_3\}$.



Gambar 4. $\{G_1, G_2, G_3\} \subseteq \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa G_1 adalah anggota $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$. Untuk graf G_2 dan G_3, pembuktian dilakukan dengan cara serupa. Akan ditunjukkan bahwa $G_1 \rightarrow (3K_2, K_{1,3})$. Pandang sebarang pewarnaan merah-biru terhadap sisi G_1. Misalkan tidak terdapat $3K_2$ merah dalam pewarnaan tersebut. Maka subgraf yang diinduksi oleh sisi-sisi merah berbentuk $K_{1,3}$ dan $K_{1,4}$, sementara sisi lainnya berwarna biru. Sehingga $G_1 \rightarrow \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $G_1^* := G_1 - e \nrightarrow (3K_2, K_{1,3})$ untuk sebarang $e \in E(G_1)$. Notasikan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ dan $E(G_1) = \{v_1v_2, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_7, v_4v_8, v_5v_6, v_5v_7, v_5v_8\}$. Misalkan sisi $e = v_1v_2$. Maka warnai sisi $v_1v_7, v_1v_8, v_3v_7, v_4v_8, v_5v_7, v_5v_8$ dengan merah, sementara sisi lainnya diwarnai biru sedemukian sehingga tidak diperoleh $K_{1,3}$ biru dalam pewarnaan tersebut. Untuk e lainnya pembuktian dilakukan dengan cara yang serupa. Sehingga diperoleh $G_1 \nrightarrow (3K_2, K_{1,3})$ Maka $G_1 \in \mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$. $\square$

4. Kesimpulan

Pada makalah ini diperoleh syarat perlu keanggotaan $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$, seperti pada Akibat 2.4, Akibat 2.5 dan Akibat 2.6. Dengan menggunakan syarat-syarat tersebut diperoleh bahwa terdapat beberapa graf yang menjadi anggota $\mathcal{R}(3K_2, K_{1,3})$, antara lain adalah graf $G \cup K_{1,3}$, untuk $G \in \{F_i \mid 1 \leq i \leq 16\}$, dimana $F_i \in \mathcal{R}(2K_2, K_{1,3})$; graf $3K_{1,3}$ seperti pada Gambar 3 dan graf G_1, G_2, G_3 seperti pada Gambar 4.

Daftar Pustaka

[1] Burr, S. A., Erdos, P., dan Lovasz, L., (1976): On Graphs of Ramsey Type, *Ars Combinatoria*, **1**, 167– 190.

[2] Muhshi, H., dan Baskoro, E. T.,(2015): Matching-Star Ramsey minimal Graphs, *Mathematics in Computer Science*, **9**, 443 – 452.

[3] Yulianti, L., (2011): Kelas Ramsey Minimal Untuk Kombinasi Graf Dua Sisi Dengan Siklus, Disertasi (Tidak diterbitkan), Program Studi Doktor Matematika Institut Teknologi Bandung, Bandung.