EUCLIDIS LOKAL PADA RUANG PROYEKTIF RIIL $\mathbb{RP}^2$

ELIZA YULISTYA UTAMI, HARIPAMYU, JENIZON

*Jurusan Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email: eliza_yulistya@yahoo.co.id*

Abstrak. Ruang topologi dengan sifat-sifat tertentu yang menggambarkan bahwa ruang tersebut secara lokal terlihat seperti suatu ruang Euclidis disebut manifold topologi. Suatu ruang topologi X dikatakan Euclidis lokal berdimensi- n apabila setiap titik dari X mempunyai suatu lingkungan dalam X yang homeomorfik terhadap suatu himpunan bagian buka dari $\mathbb{R}^n$. Salah satu contoh dari manifold topologi yaitu Ruang proyektif riil ($\mathbb{RP}^2$). Pada makalah ini akan dibahas sifat Euclidis lokal pada ruang proyektif riil ($\mathbb{RP}^2$).

Kata Kunci: Ruang topologi, Euclidis lokal, homeomorfik, manifold topologi, ruang proyektif riil

1. Pendahuluan

Topologi adalah cabang dari ilmu Matematika yang mengkaji tentang sifat-sifat dari himpunan-himpunan yang tidak berubah oleh deformasi yang kontinu. Topologi memainkan peran penting dalam menyediakan fondasi untuk setiap cabang Matematika yang menggunakan konsep ruang. Suatu ruang yang dilengkapi dengan suatu topologi disebut dengan ruang topologi. [5]

Ruang topologi dengan sifat-sifat tertentu yang menggambarkan bahwa ruang tersebut secara lokal terlihat seperti suatu ruang Euclidis disebut manifold topologi. Sifat-sifat topologi dari suatu himpunan tersebut diawetkan oleh suatu relasi yang paling mendasar dalam topologi yaitu relasi homeomorfisma. Suatu ruang topologi X dikatakan Euclidis berdimensi n lokal (*locally Euclidean of dimension n*) jika setiap titik dari X mempunyai suatu lingkungan dalam X yang homeomorfik terhadap suatu himpunan bagian buka dari $\mathbb{R}^n$. Salah satu contoh yang menarik dari manifold topologi adalah ruang proyektif riil ($\mathbb{RP}^n$). [5]

2. Landasan Teori

Definisi 2.1. [4] Misalkan X adalah suatu himpunan. Suatu relasi $\sim$ pada himpunan X dikatakan relasi ekuivalen apabila bersifat:

- (1) Refleksif, yaitu $x \sim x$ untuk semua $x \in X$,
- (2) Simetri, yaitu jika $x \sim y$ maka $y \sim x$,
- (3) Transitif, yaitu jika $x \sim y$ dan $y \sim z$ maka $x \sim z$.

Contoh 2.2. Suatu relasi $\sim$ pada himpunan $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ yang didefinisikan oleh $x \sim y \Leftrightarrow y = kx$ dengan $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dan $k(\neq 0) \in \mathbb{R}$ adalah relasi ekuivalen.

Definisi 2.3. [4] Jika $\sim$ adalah relasi ekuivalen pada X , maka kelas ekuivalen dari $x \in X$ ditulis $[x]$ adalah himpunan semua $y \in X$ sedemikian sehingga $y \sim x$, ditulis:

$$[x] = \{y \in X | y \sim x\} \quad (2.1)$$

Contoh 2.4. Relasi ekuivalen $\sim$ didefinisikan pada himpunan $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ oleh $kx \sim x$ dengan $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dan $k(\neq 0) \in \mathbb{R}$, maka diperoleh kelas ekuivalen:

$$[x] = \{y \mid y = kx, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, k \neq 0\} \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Definisi 2.5. [5] Misalkan X himpunan. Suatu topologi pada X adalah koleksi himpunan bagian τ dari X yang memenuhi:

- (1) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$,
- (2) Jika $U_1, \dots, U_n$ elemen dari τ maka irisan dari $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ juga elemen dari τ ,
- (3) Jika $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, dengan A adalah himpunan indeks, sebarang koleksi dari elemen τ maka $\cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ adalah elemen dari τ .

Dalam hal ini pasangan (X, τ) disebut ruang topologi, anggota-anggota dari X disebut titik-titik dan himpunan-himpunan yang membentuk τ disebut himpunan-himpunan bagian buka dari X .

Definisi 2.6. [2] Suatu himpunan bagian G dari $\mathbb{R}^n$ buka di $\mathbb{R}^n$ jika untuk setiap titik x di G terdapat suatu bilangan positif $r \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga setiap titik y di $\mathbb{R}^n$ yang memenuhi $d(x, y) < r$ juga ada di G .

Teorema 2.7. [2]

1. $\emptyset$ dan $\mathbb{R}^n$ buka di $\mathbb{R}^n$.
2. Gabungan dari sebarang koleksi himpunan buka adalah buka.
3. Irisan dari sebarang koleksi himpunan buka berhingga adalah buka.

Definisi 2.8. [3] Misalkan X dan Y ruang topologi dan $f : X \rightarrow Y$ suatu fungsi. Fungsi f dikatakan kontinu jika $f^{-1}(U)$ terbuka untuk setiap himpunan buka $U \subset Y$.

Misalkan X suatu ruang topologi. Salah satu cara untuk mengkonstruksi ruang topologi yang baru dari X adalah dengan mengidentifikasi beberapa titik dalam X dengan setiap titik-titik yang lainnya.

Definisi 2.9. [4] Misalkan X suatu ruang topologi, Y suatu himpunan, dan $\pi : X \rightarrow Y$ suatu pemetaan surjektif, maka topologi kuosien pada Y yang ditentukan oleh π didefinisikan sebagai suatu himpunan bagian $U \subseteq Y$ terbuka jika dan hanya jika $\pi^{-1}(U)$ terbuka di X .

Definisi 2.10. [4] Misalkan X dan Y ruang topologi. Pemetaan $\pi : X \longrightarrow Y$ disebut pemetaan kuosien apabila π surjektif dan kontinu, dan Y memiliki topologi kuosien yang ditentukan oleh π .

Definisi 2.11. [3] Misalkan X suatu ruang topologi dan $\sim$ suatu relasi ekuivalen pada X . Misalkan $Y = X/\sim$ himpunan dari kelas-kelas ekuivalen dan $\pi : X \longrightarrow Y$ adalah pemetaan yang memetakan setiap $x \in X$ ke kelas ekuivalen $[x] \in X/\sim$, maka Y bersama-sama dengan topologi kuosien yang dihasilkan oleh π disebut ruang kuosien dari X .

Teorema 2.12. [4] (Sifat Pemetaan Kuosien) Misalkan $\pi : X \rightarrow Y$ suatu pemetaan kuosien. Jika $U \subseteq X$ suatu subhimpunan buka maka pemetaan π yang dibatasi oleh U , $\pi|_U : U \longrightarrow \pi(U)$ adalah suatu pemetaan kuosien.

Definisi 2.13. [4] Ruang proyektif riil berdimensi n , dinotasikan dengan $\mathbb{RP}^n$ adalah ruang dari garis-garis yang melalui titik asal $\mathbb{R}^{n+1}$.

Misalkan didefinisikan relasi ekuivalen $\sim$ pada $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x \sim y \Leftrightarrow y = kx$, untuk $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ dan suatu $k(\neq 0) \in \mathbb{R}$, maka diperoleh kelas ekuivalen dari x , yang dinotasikan dengan $[x] = [x_1, \dots, x_{n+1}]$ (Contoh 2.2 dan 2.4).

Akibatnya ruang proyektif $\mathbb{RP}^n$ didefinisikan juga sebagai himpunan dari semua kelas ekuivalen $[x]$ yaitu koleksi dari himpunan-himpunan bagian dari $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ yang saling asing dimana gabungannya adalah $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Didefinisikan pemetaan $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ oleh $\pi(x) = [x]$. Pemetaan ini menghasilkan topologi kuosien pada $\mathbb{RP}^n$ yang didefinisikan sebagai berikut: himpunan bagian U di $\mathbb{RP}^n$ buka jika dan hanya jika $\pi^{-1}(U)$ buka di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, keluarga τ dari himpunan-himpunan buka ini memenuhi definisi topologi. $\mathbb{RP}^n$ bersama-sama dengan topologi τ disebut dengan ruang kuosien.

3. Euclidis Lokal pada Ruang Proyektif Riil Berdimensi-2 ($\mathbb{RP}^2$)

Definisi 3.1. [4] Suatu pemetaan $f : M \longrightarrow N$ antara ruang topologi M dan N dikatakan homeomorfisma jika f bijektif sedemikian sehingga f dan f^{-1} kontinu. Ruang topologi M dikatakan homeomorfik ke ruang topologi N jika ada suatu homeomorfisma $f : M \longrightarrow N$.

Definisi 3.2. [4] Suatu ruang topologi M dikatakan Euclidis lokal berdimensi- n apabila untuk setiap $x \in M$ terdapat lingkungan U dari x dengan $U \subseteq M$ yang homeomorfis terhadap suatu himpunan bagian buka dari $\mathbb{R}^n$.

Berdasarkan definisi diatas, untuk menunjukkan $\mathbb{RP}^2$ bersifat Euclidis lokal maka langkah yang akan dilakukan adalah

- Menentukan suatu lingkungan U_i dari $[x]$ untuk setiap $[x] \in \mathbb{RP}^2$,
- Menentukan suatu himpunan bagian buka $\tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}^2$,
- Menentukan suatu homeomorfisma $\varphi_i : U_i \longrightarrow \tilde{U}_i$.

Misalkan pemetaan $\pi : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^2$ didefinisikan dengan memetakan setiap $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ke $[x] \in \mathbb{RP}^2$. Notasi $[x] = \pi(x) \in \mathbb{RP}^2$ juga menyatakan garis yang direntang oleh x . Pemetaan π adalah pemetaan surjektif.

Selanjutnya didefinisikan topologi kuosien pada $\mathbb{RP}^2$ sebagai berikut: Suatu himpunan bagian U di $\mathbb{RP}^2$ adalah buka jika bayangan invers $\pi^{-1}(U)$ buka di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Keluarga dari semua himpunan-himpunan buka ini memenuhi definisi topologi.

- a. Misalkan $\tilde{U}_i \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dimana $x^i \neq 0$ untuk $i = 1, 2, 3$ dan $U_i = \pi(\tilde{U}_i) \subseteq \mathbb{RP}^2$. Karena $\mathbb{RP}^2$ adalah himpunan dari kelas-kelas ekuivalen $[x]$ dengan topologi kuosien yang ditentukan oleh π , maka $\tilde{U}_i$, $i = 1, 2, 3$ adalah buka di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Karena $\tilde{U}_i = \pi^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2, 3$ buka di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ maka U_i adalah buka di $\mathbb{RP}^2$. Berdasarkan Teorema 2.12, pemetaan π yang dibatasi oleh $\tilde{U}_i$, $\pi|_{\tilde{U}_i}: \tilde{U}_i \rightarrow U_i$ adalah pemetaan kuosien. Ini berarti bahwa $\pi|_{\tilde{U}_i}$ surjektif dan kontinu.
- b. Misalkan $U_i = \{[x] \in \mathbb{RP}^2 \mid x^i \neq 0\}$ dengan $i = 1, 2, 3$. Telah ditunjukkan bahwa U_i buka di $\mathbb{RP}^2$ dengan U_i untuk $i = 1, 2, 3$ diberikan oleh:

$$\begin{aligned} U_1 &= \{[x] = [(x^1, x^2, x^3)] \in \mathbb{RP}^2 \mid x^1 \neq 0\}, \\ U_2 &= \{[x] = [(x^1, x^2, x^3)] \in \mathbb{RP}^2 \mid x^2 \neq 0\}, \\ U_3 &= \{[x] = [(x^1, x^2, x^3)] \in \mathbb{RP}^2 \mid x^3 \neq 0\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dikontruksi suatu pemetaan $\varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^2$ dengan $i = 1, 2, 3$ yang didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} \varphi_1([x^1, x^2, x^3]) &= \left(\frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}\right) = (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2, \\ \varphi_2([x^1, x^2, x^3]) &= \left(\frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2}\right) = (v^1, v^2) \in \mathbb{R}^2, \\ \varphi_3([x^1, x^2, x^3]) &= \left(\frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3}\right) = (w^1, w^2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pemetaan ini terdefinisi dengan baik karena nilainya tidak berubah oleh perkalian x dengan suatu konstanta tak nol. Perhatikan bahwa $\varphi_i(U_i)$, $i = 1, 2, 3$ merupakan himpunan bagian buka di $\mathbb{R}^2$.

- c. Misalkan $V_i = \varphi_i(U_i)$, $i = 1, 2, 3$. Akan ditunjukkan bahwa $\varphi_i: U_i \rightarrow V_i$, $i = 1, 2, 3$ adalah suatu homeomorfisma.

Didefinisikan $\phi_i: V_i \rightarrow U_i$ dengan

$$V_i = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_i([x]), [x] \in U_i\} \quad (3.3)$$

dengan $i = 1, 2, 3$ oleh:

$$\begin{aligned} \phi_1(u^1, u^2) &= [1, u^1, u^2], \\ \phi_2(v^1, v^2) &= [v^1, 1, v^2], \\ \phi_3(w^1, w^2) &= [w^1, w^2, 1], \end{aligned} \quad (3.4)$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 (\varphi_1 \circ \phi_1)(u^1, u^2) &= \varphi_1(\phi_1(u^1, u^2)) \\
 &= \varphi_1([1, u^1, u^2]) \\
 &= \varphi_1([1, \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1}]) \\
 &= \varphi_1([x^1, x^2, x^3]) \\
 &= (u^1, u^2).
 \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama, dapat dibuktikan juga untuk $i = 2$ dan $i = 3$. Akibatnya $(\varphi_i \circ \phi_i) = Id_{V_i}$ dan $(\phi_i \circ \varphi_i) = Id_{U_i}$, $i = 1, 2, 3$. Jadi terbukti $\phi_i = \varphi_i^{-1}$ untuk $i = 1, 2, 3$.

Karena U_i buka dan $\mathbb{R}^2$ buka maka φ_i adalah suatu pemetaan kuosien yang mengakibatkan φ_i surjektif dan kontinu. Karena φ_i dan ϕ_i kontinu maka φ_i untuk $i = 1, 2, 3$ adalah homeomorfisma.

Dari [a],[b], dan [c] diperoleh bahwa $\mathbb{RP}^2$ bersifat Euclidis lokal berdimensi n .

4. Kesimpulan

Ruang proyektif riil berdimensi-2 yang dinotasikan dengan $\mathbb{RP}^2$ adalah ruang dari garis-garis yang melalui titik asal $\mathbb{R}^3$. Karena terdapat lingkungan U_i dari $[x]$ untuk setiap $[x] \in \mathbb{RP}^2$ dengan $U_i \subseteq \mathbb{RP}^2$ yang homeomorfik terhadap suatu himpunan bagian buka dari $\mathbb{R}^2$, maka $\mathbb{RP}^2$ bersifat Euclidis lokal.

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Prof. Dr. Syafrizal Sy, Efendi, M.Si dan Dr. Ahmad Iqbal Baqi yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Bartle, Robert G. dan Donald R.S. 2000. *Introduction to Real Analysis*, 3rd Edition. John Wiley and Sons, Inc, Singapore
- [2] Bartle, Robert G.. 1964. *The Elements of Real Analysis*, 2nd Edition. John Wiley and Sons, Inc, Canada
- [3] Bredon, Glen E..1993. *Topology and Geometry*. Springer, New York
- [4] Lee, M. John. 2013. *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd Edition. Springer, New York
- [5] Lee, M. John. 2010. *Introduction to Topological Manifolds*, 2nd Edition. Springer, New York
- [6] Ryan, Patrick J..1986. *Euclidean and Non-Euclidean Geometry An Analytic Approach*. Cambridge University Press, USA