

PEMBUATAN BAGAN KENDALI MULTIVARIAT T^2 -HOTELLING UNTUK PROSES PERKULIAHAN Studi Kasus : IPK dan Lama Studi Lulusan Matematika Universitas Andalas

BELINDA YUNEIDI, IZZATI RAHMI, HAZMIRA YOZZA

*Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas Padang,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia
belindayuneidi@gmail.com*

Abstrak. Salah satu tolak ukur kualitas suatu perguruan tinggi ditentukan oleh lulusannya. Sedangkan salah satu ukuran penentu kualitas lulusan dari sebuah universitas adalah IPK (Indeks Prestasi Kumulatif) dan lama studi para lulusan tersebut. Untuk mendapatkan IPK dan lama studi yang diharapkan harus ditunjang oleh proses perkuliahan yang berkualitas. Dari sudut pandang *Statistical Proses Control (SPC)*, sebuah proses yang berkualitas adalah proses yang menjaga agar *mean* proses tersebut tidak jauh berbeda dengan target dan berpola acak murni atau *random*. Bagan kendali yang digunakan adalah bagan kendali multivariat T^2 -Hotelling. Data yang digunakan adalah data IPK dan lama studi mahasiswa lulusan matematika angkatan 1997-2007. Dari hasil didapatkan bahwa proses perkuliahan pada jurusan matematika belum terkendali karena bagan kendalinya menyerupai pola *grouping*.

Kata Kunci: Bagan kendali multivariat T^2 -Hotelling, proses perkuliahan, IPK, lama studi, Jurusan Matematika.

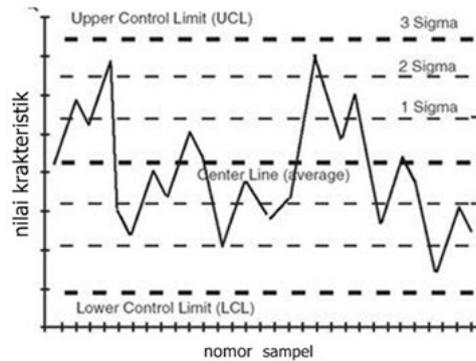
1. Pendahuluan

Sebuah Universitas merupakan jenjang pendidikan tertinggi, karena *output* yang dihasilkan adalah seorang ahli dalam bidang ilmu yang didalamnya, mulai dari Ahli Madya, Sarjana, Master, sampai Doktor. Untuk dapat menghasilkan ahli yang berkualitas, maka diperlukan adanya kestabilan proses yang terjadi didalamnya, salah satunya adalah proses perkuliahan. Kestabilan tersebut dapat diperoleh dengan adanya pengontrolan pada setiap proses yang terjadi. Secara umum, program studi Strata 1 dijadwalkan delapan semester yang dapat ditempuh kurang dari delapan semester dan selambat-lambatnya empat belas semester (84 bulan). Menurut Peraturan Akademik Program Sarjana Universitas Andalas seorang mahasiswa dinyatakan lulus pada program Sarjana salah satunya adalah dengan IPK minimal 2,00 [4].

Perhitungan IPK disini secara matematis dapat dirumuskan seperti:

$$IPK = \frac{\sum_{i=1}^n M_i K_i}{N}$$

M_i merupakan angka mutu mata kuliah ke- i , K_i merupakan SKS mata kuliah ke- i , dan N merupakan jumlah total SKS yang diambil selama proses perkuliahan [4].



Gambar 1. Contoh bagan kendali shewhart

Dalam statistika, bagan kendali adalah salah satu alat yang digunakan untuk mengendalikan proses. Bila terdapat dua variabel atau lebih yang harus dikendalikan secara bersamaan, maka bagan kendali yang digunakan adalah bagan kendali multivariat. Salah satu bagan kendali multivariat yang dapat digunakan untuk pengendalian vektor *mean* dari variabel-variabel tersebut adalah dengan menggunakan statistik T^2 -Hotelling. Karena terdapat dua variabel yang harus dikendalikan dalam proses perkuliahan yaitu IPK dan lama studi, maka dalam penelitian ini akan diangkat masalah pembuatan bagan kendali multivariat untuk pengendalian vektor *mean* dari variabel IPK dan lama studi mahasiswa lulusan Matematika Universitas Andalas.

2. Bagan Kendali T^2 -Hotelling

Suatu proses sebenarnya adalah perubahan *input* menjadi *output*. Pada proses perubahan itu tentunya terdapat gangguan yang membuat *output* menjadi beragam. Untuk meminimalisir keragaman itu diperlukan pengendalian terhadap proses tersebut. Pengendalian terhadap proses ini dapat kita lakukan dengan menggunakan alat-alat statistika, yang disebut dengan *Statistical Process Control (SPC)*. Salah satu alat pengendalian SPC adalah bagan kendali, bagan kendali pertama diperkenalkan pada tahun 1924 oleh Walter A. Shewhart yaitu yang dikenal dengan **bagan kendali shewhart**. Fungsi umum bagan kendali ini adalah untuk membantu mengurangi keragaman, memonitor kinerja setiap saat, mendeteksi *trend* dan kondisi di luar kendali sehingga memungkinkan proses koreksi secara cepat [1]. Berikut adalah bentuk umum bagan kendali shewhart.

Bagan kendali ini terdiri dari garis tengah yang merupakan rata-rata nilai karakteristik kualitas yang berhubungan dengan keadaan terkendali yang disebut dengan garis pusat atau *Center Line (CL)*, dan dua garis mendatar lain yang dinamakan batas kendali atas atau *Upper Control Limit (UCL)* dan batas kendali bawah atau *Lower Control Limit (LCL)*. Selain itu, bagan kendali juga sering dilengkapi dengan garis-garis antara garis pusat (*CL*) dengan *LCL* atau *UCL* yang disebut dengan batas 1σ (1 sigma) dan batas 2σ (2 sigma) seperti pada gambar. Ada beberapa

pola yang dapat kita temui dalam bagan kendali, diantaranya pola *random* (acak), *freaks* (ganjil), *shift* (pergeseran), *trend* (kecendrungan), *grouping* (kumpulan), *instability* (ketidakstabilan), *stable mixture* (kestabilan campuran), dan *stratification* (stratifikasi) [3].

Dalam bagan kendali multivariat, misalkan kita melakukan m kali pengamatan untuk p variabel yang saling berkorelasi, dimana pada masing-masing pengamatan diambil n buah sampel secara acak. Data pada setiap sampel merupakan realisasi dari sampel *random* $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \dots, \vec{X}_n$ yang diambil dari distribusi $N_p(\vec{\mu}, \Sigma)$. Jadi kita berhadapan dengan m buah matriks data yang berukuran $(p \times n)$ seperti yang ditunjukkan berikut ini :

$$\begin{pmatrix} x_{11}^1 & x_{12}^1 & \dots & x_{1p}^1 \\ x_{21}^1 & x_{22}^1 & \dots & x_{2p}^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}^1 & x_{n2}^1 & \dots & x_{np}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 & \dots & x_{1p}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 & \dots & x_{2p}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}^2 & x_{n2}^2 & \dots & x_{np}^2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} x_{11}^m & x_{12}^m & \dots & x_{1p}^m \\ x_{21}^m & x_{22}^m & \dots & x_{2p}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1}^m & x_{n2}^m & \dots & x_{np}^m \end{pmatrix}$$

Dengan x_{ji}^k adalah sampel ke- i , dari variabel ke- j pada pengamatan ke- k , dimana $j = 1, 2, \dots, p, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, m$. Dari matriks data diatas, kita dapat menentukan beberapa taksiran, diantaranya :

- (1) $\vec{X}_i^k = \begin{pmatrix} x_{i1}^k \\ x_{i2}^k \\ \dots \\ x_{ip}^k \end{pmatrix}$ menyatakan vektor data ke- i pada pengamatan ke- k .
- (2) $\bar{X}_j^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}^k$ menyatakan *mean* sampel dari variabel ke- j pada pengamatan ke- k .
- (3) $\vec{\bar{X}}^k = \begin{pmatrix} \bar{X}_1^k \\ \bar{X}_2^k \\ \dots \\ \bar{X}_p^k \end{pmatrix}$ menyatakan vektor *mean* peubah pengamatan ke- k .
- (4) $\vec{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \vec{\bar{X}}^k$ menyatakan vektor *grand mean*.
- (5) $S^k = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{X}_i^k - \vec{\bar{X}}^k)(\bar{X}_i^k - \vec{\bar{X}}^k)^t$ menyatakan matriks ragam peragam pada pengamatan ke- k .
- (6) $\bar{S} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S^k$ menyatakan *mean* dari matriks ragam peragam sampel.

Berdasarkan hampiran-hampiran diatas , maka kita dapat menentukan statistik T^2 -Hotelling untuk pembuatan bagan kendali proses yang melibatkan p buah variabel adalah

$$T_k^2 = n(\vec{\bar{X}}^k - \vec{\bar{X}})^t \bar{S}^{-1} (\vec{\bar{X}}^k - \vec{\bar{X}})$$

dengan T_k^2 merupakan nilai statistik T^2 -Hotelling pada pengamatan ke- k .

3. Metodologi Penelitian

Data yang digunakan adalah nilai IPK dan lama studi lulusan mahasiswa Matematika Universitas Andalas, mulai dari angkatan 1997 sampai angkatan 2007.

Untuk penelitian ini hanya digunakan 24 sampel lulusan matematika tiap angkatan-nya yaitu berupa IPK (X^1) dan lama studi (X^2 dalam bulan).

Sebelum membuat bagan kendali T^2 -Hotelling, dilakukan dulu uji korelasi antara kedua variabel pada seluruh pengamatan. Setelah asumsi bahwa seluruh data berkorelasi, maka pembuatan bagan kendali T^2 -Hotelling dapat dilanjutkan. Untuk membuat bagan kendali ini, data kita bagi menjadi dua bagian, yaitu data pertama akan digunakan untuk fase SUS yang merupakan fase persiapan, dan selanjutnya digunakan untuk fase *retrospective* yang berguna untuk memvalidasi bagan kendali sehingga digunakan sebagai bagan pengendalian proses masa yang akan datang. Langkah-langkah yang dapat dilakukan dalam pembuatan bagan kendali T^2 -Hotelling untuk pengendalian vektor *mean* IPK data diatas adalah sebagai berikut :

(1) Fase SUS

- Hitung vektor \vec{X}^k , dan matriks S^k untuk setiap pengamatan $k = 1, 2, \dots, 6$ (yaitu angkatan 1997-2002).
- Hitung vektor *grand mean* \vec{X} dan matriks \bar{S} .
- Hitung nilai T_k^2 masing-masing pengamatan dengan menggunakan persamaan :

$$T_k^2 = n(\vec{X}^k - \vec{X})^t \bar{S}^{-1} (\vec{X}^k - \vec{X})$$
- Batas kendali yang digunakan untuk proses ini adalah [2] :

$$UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{m(n-1)-p+1} F_{\alpha;p,m(n-1)-p+1}$$
 dan $LCL = 0$
- Plotkan nilai-nilai T_k^2 dan batas-batas kendali.
- Jika ada pengamatan yang berada diluar batas kendali atau dengan kata lain terdapat sinyal *out of control*, maka pengamatan dikeluarkan serta ulangi langkah 1 sampai 5. Proses ini dihentikan jika tidak ada lagi sinyal *out of control*.

(2) Fase *Retrospective*

- Tentukan vektor \vec{X}^k untuk $k = 7, \dots, 11$ (yaitu angkatan 2003-2007).
- Hitung nilai T_k^2 dengan persamaan :

$$T_k^2 = n(\vec{X}^k - \vec{X})^t \bar{S}^{-1} (\vec{X}^k - \vec{X})$$
 untuk pengamatan diatas.
- Hitung batas kendali [2] :

$$UCL = \frac{p(m-1)(n-1)}{m(n-1)-p+1} F_{\alpha;p,m(n-1)-p+1}$$
 dan $LCL = 0$
- Bagan kendali siap digunakan untuk pengendalian proses.

4. Analisis Dan Pembahasan

Sebelum membuat bagan kendali multivariat, terlebih dahulu akan diperiksa apakah kedua peubah yaitu nilai IPK dan lama studi mahasiswa berkorelasi dengan menggunakan uji korelasi *product moment*. Hipotesis yang digunakan adalah :

$$H_0 : \rho = 0$$

$$H_1 : \rho \neq 0$$

Dimana ρ merupakan nilai koefisien korelasi dari kedua peubah. Berikut ini adalah tabel nilai korelasi antar kedua peubah. Dari nilai korelasi antar peubah diatas

Tabel 1. Tabel Nilai Korelasi Peubah

Subgrup ke-	Angkatan	Nilai Korelasi X^1 dan X^2	Subgrup ke-	Angkatan	Nilai Korelasi X^1 dan
1	1997	-0.787	7	2003	-0.601
2	1998	-0.715	8	2004	-0.828
3	1999	-0.697	9	2005	-0.698
4	2000	-0.883	10	2006	-0.668
5	2001	-0.776	11	2007	-0.297
6	2002	-0.767	-	-	-

disimpulkan bahwa terdapat korelasi antara kedua peubah yaitu artinya terdapat korelasi antara IPK dan lama studi mahasiswa matematika. Sehingga bagan kendali multivariat dapat kita bentuk.

(1) Fase SUS

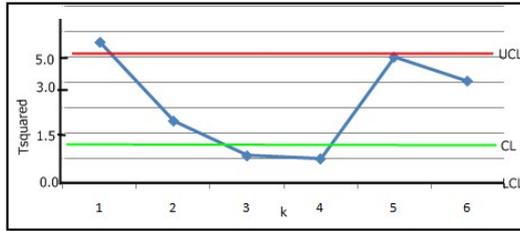
Pada fase ini digunakan 6 pengamatan/subgrup yaitu angkatan 1997-2002, dan pengamatan lainnya akan digunakan untuk fase *retrospective* yaitu angkatan 2003-2007. Dengan mengolah data masing-masing subgrup seperti langkah-langkah pada metodologi penelitian menggunakan Minitab 14, maka didapatkan nilai T^2 -Hotelling untuk tiap pengamatan fase ini pada tabel berikut.

Tabel 2. Tabel Vektor *Mean* dan Nilai T^2 -Hotelling Sampel Fase SUS Tahap I

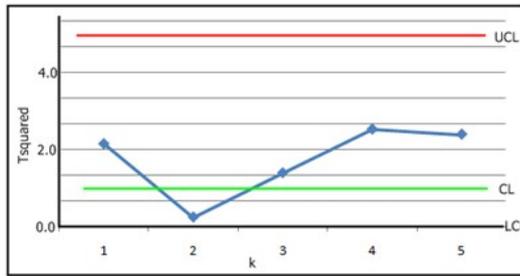
k	Angkatan	\bar{X}^1	\bar{X}^2	T_k^2
1	1997	3.06875	61.75	6.4272
2	1998	3.15417	57.1667	1.6872
3	1999	3.06875	57.5417	0.6408
4	2000	3.05958	59.5	0.564
5	2001	3.165	53.8333	5.088
6	2002	2.99958	58.7083	3.4824

Dari nilai peubah $p = 2$, banyak pengamatan/subgrup $m = 6$, banyak sampel tiap subgrup $n = 24$, dan $\alpha = 0.05$ sehingga didapatkan nilai UCL = 5,141, CL = 1,2 dan nilai LCL = 0. Sehingga bagan kendali fase SUS dapat digambarkan sebagai berikut.

Dari bagan kendali diatas, terlihat bahwa pengamatan ke-1 merupakan titik *out of control* atau diluar batas kendali, maka pengamatan ke-1 dibuang dan langkah pembuatan bagan kendali seperti diatas diulangi lagi dengan jumlah pengamatannya adalah 5 pengamatan yaitu angkatan 1998-2002. Berikut



Gambar 2. Bagan Kendali T^2 -Hotelling Fase SUS Tahap I



Gambar 3. Bagan Kendali T^2 -Hotelling Fase SUS Tahap II

adalah tabel vektor *mean* dan nilai T^2 -Hotelling masing-masing subgrup untuk fase SUS tahap II.

Tabel 3. Tabel Vektor *Mean* dan Nilai T^2 -Hotelling Sampel Fase SUS Tahap II

k	Angakatan	\bar{X}^1	\bar{X}^2	T_k^2
2	1998	3.15417	57.1667	2.3592
3	1999	3.06875	57.5417	0.1824
4	2000	3.05958	59.5	1.3056
5	2001	3.165	53.8333	3.0192
6	2002	2.99958	58.7083	2.7744

Dari nilai peubah $p = 2$, banyak pengamatan/subgrup $m = 5$, banyak sampel tiap subgrup $n = 24$, dan $\alpha = 0.05$ sehingga didapatkan nilai $UCL = 4,965$, $CL = 1,13$ dan nilai $LCL = 0$. Sehingga bagan kendali fase SUS tahap II dapat digambarkan sebagai berikut.

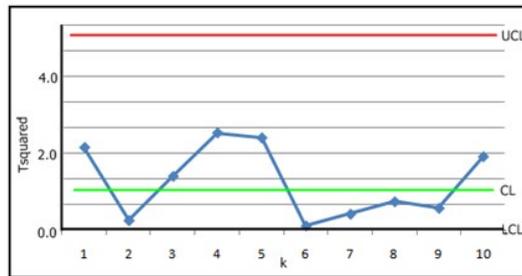
(2) Fase *Retrospective*

Pada fase *retrospective* ini, nilai vektor *grand mean* $\vec{\bar{X}}$, matriks \bar{S} , dan matriks \bar{S}^{-1} yang digunakan adalah nilai yang telah didapatkan pada fase SUS tahap II. Berikut adalah tabel vektor *mean* dan nilai T^2 -Hotelling pada setiap subgrup untuk fase *retrospective* adalah.

Sehingga bagan kendali fase *retrospective* dapat digambarkan sebagai

Tabel 4. Tabel Vektor Mean dan Nilai T^2 -Hotelling Sampel Fase *Retrospective*

k	Angkatan	\bar{X}^1	\bar{X}^2	T_k^2
7	2003	3.01333	59.0417	0.0704
8	2004	3.00583	56.25	0.3179
9	2005	3.09125	52.125	0.6056
10	2006	3.01	55.2917	0.4503
11	2007	3.12833	47.0417	1.9796



Gambar 4. Bagan Kendali T^2 -Hotelling Fase *retrospective*

Interpretasi dari masing-masing bagan kendali untuk tiap fase diatas adalah :

(1) Fase SUS

Pada bagan kendali fase SUS tahap I (Gambar 1) dapat dilihat bagan kendali tersebut menyerupai pola *freaks*, dimana terdapat satu titik *out of control* yaitu titik pengamatan ke-1 (angkatan 1997). Dapat dilihat pada Tabel 2 bahwa rata-rata lama studi mahasiswa angkatan 1997 tergolong lebih lama dari angkatan lainnya. Sedangkan pada bagan kendali fase SUS tahap II (Gambar 3) terlihat bahwa polanya menyerupai pola *shift* karena lebih banyak titik pengamatan yang terletak pada sisi antara CL dan UCL. Hal ini berarti terjadi pergeseran (*shift*) vektor *mean* IPK dan lama studi tiap tahunnya pada dari sisi LCL dan CL ke sisi CL dan UCL yang kemudian seluruh titik pengamatan selanjutnya hanya berada pada sisi ini, yaitu mulai dari tahun 2000-2002. Hal ini diduga karena adanya pengaruh pergantian dosen pengajar mata kuliah dan praktikum pada tahun ajaran 2003/2004 dan 2004/2005 yang membuat metode pembelajaran juga berubah tergantung pada dosen pengajar mata kuliah dan praktikum tersebut.

(2) Fase *Retrospective*

Pada bagan kendali fase *retrospective* ini dapat dilihat bahwa polanya menyerupai pola *grouping* karena beberapa titik pengamatan membentuk kelompok seperti pada Gambar 4. Hal ini diduga disebabkan oleh perubahan kebijakan angka dan nilai mutu yang diterapkan oleh Universitas Andalas pada tahun ajaran 2005/2006, yang membuat karakteristik IPK pada angkatan 2000-2002 hampir sama dan memiliki nilai *mean* vektor IPK yang saling berdekatan dan

hal yang sama juga membuat karakteristik IPK angkatan 2003-2006 yaitu setelah perubahan angka dan nilai mutu ditetapkan, hampir sama dan juga memiliki mean vektor IPK yang saling berdekatan.

5. Kesimpulan

Bagan kendali fase SUS menyerupai pola *shift* diduga karena pengaruh perubahan dosen pengajar mata kuliah dan praktikum pada tahun ajaran 2003/2004 dan 2004/2005, sedangkan pada bagan kendali fase *retrospective* menyerupai pola *grouping* diduga disebabkan oleh perubahan kebijakan angka dan nilai mutu yang diterapkan oleh Universitas Andalas pada tahun ajaran 2005/2006. Untuk menjaga proses perkuliahan di Jurusan Matematika tetap baik sebaiknya perlu ada perbaikan yang terus-menerus.

6. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Dodi Devianto, Ibu Susila Bahri dan Bapak Mahdhivan Syafwan yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Grant, E.L, R.S. Leavenworth. 1996. *Pengendalian Mutu Statistik Jilid 1 edisi keenam*. Erlangga. Jakarta.
- [2] John, CY, RL. Mason. *Multivariate Process Control with Industrial Application*. InControl Technologies Inc. Houston, Texas.
- [3] Montgomery, D.C. *Introduction to Statistical Proccess Control 5th Edition*. John Wiley and Sons Inc, Arizona.
- [4] Zulqayyim, dkk. 2005 *Informasi Salingka Unand*. Universitas Andalas, Padang.