Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **2** Hal. 16 – 19
ISSN : 2303–291X

DIMENSI PARTISI GRAF LINTASAN KORONA GRAF BINTANG $P_m \odot K_{1,n}$ UNTUK $m \geq 1$ DAN $n \geq 3$

SARI PURWANINGSIH, ZULAKMAL
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : saripurwaningsih@ymail.com

Misalkan G dan H adalah suatu graf. Graf hasil Korona $G \odot H$ didefinisikan sebagai graf yang diperoleh dari G dan H dengan mengambil sebuah salinan graf G dan salinan graf H dan kemudian menghubungkan setiap titik dari salinan ke-i graf H dengan sebuah titik ke-i dari G. Dalam paper ini akan dibahas kembali tentang penentuan dimensi partisi dari graf $P_m \odot K_{1,n}$, dimana P_m adalah graf lintasan dengan orde m dan $K_{1,n}$ adalah graf bintang dengan orde $n+1$, untuk $m \geq 1$ dan $n \geq 3$, seperti telah dituliskan dalam [3].

Kata Kunci: Dimensi partisi, graf Korona, graf lintasan, graf bintang

1. Pendahuluan

Teori graf adalah salah satu bagian ilmu matematika di bidang kombinatorik. Banyak permasalahan yang dapat diterapkan dan diselesaikan dengan menggunakan teori graf. Graf adalah kumpulan titik dan sisi, dinotasikan dengan $G = (V, E)$, dimana V menyatakan himpunan titik yang tak kosong dan E menyatakan himpunan sisi yang merupakan pasangan titik tak terurut dari titik-titik V.

Dengan kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi, banyak peneliti yang mengkaji tentang graf, diantaranya pewarnaan graf dan dimensi partisi graf. Konsep dimensi partisi dari suatu graf pertama kali diperkenalkan oleh Chartrand dkk. [2]. Chartrand dkk. [2] menentukan dimensi partisi dari graf bintang ganda T serta memberikan batas atas dan batas bawah dimensi partisi graf ulat. Sedangkan Chartrand dkk.[1] membuktikan bahwa suatu graf G mempunyai $pd(G) = 2$ jika dan hanya jika G adalah graf lintasan P_n, dan menunjukkan bahwa graf G mempunyai $pd(G) = n$ jika dan hanya jika $G = K_n$, untuk $n \geq 1$.

Chartrand dkk. [1] mengelompokkan semua graf terhubung G dengan orde n yang mempunyai dimensi partisi $(n-1)$. Jika G adalah graf terhubung dengan orde $n \geq 2$ maka $pd(G) = n - 1$ jika dan hanya jika G adalah salah satu dari graf. Pengelompokkan berikutnya dilakukan oleh Tomescu [5], yaitu mengelompokan semua graf terhubung G orde n yang mempunyai dimensi partisi $(n - 2)$.

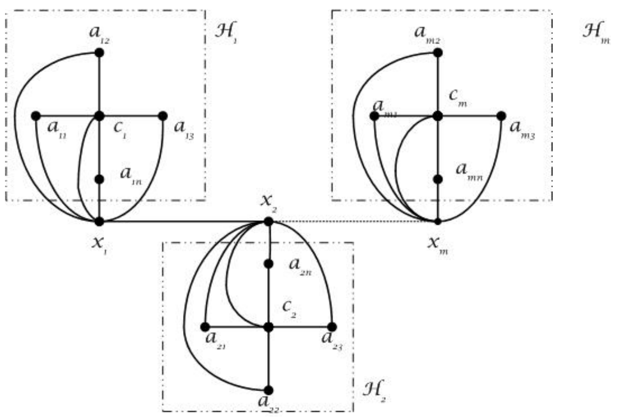
Dimensi partisi untuk beberapa kelas graf tertentu telah dikaji oleh banyak peneliti, misalnya dimensi partisi graf pohon yang terdiri dari graf bintang ganda, graf bintang, graf bipartit dan graf ulat dikaji oleh Chartrand dkk. [2], graf roda dikaji oleh Tomescu dkk. [5], dan graf mirip roda antara lain graf gir, graf helm dan graf bunga matahari dikaji oleh Javaid dkk. [4].

2. Dimensi Partisi Graf Lintasan Korona Graf Bintang

Misalkan $G = (V, E)$ suatu graf, misalkan terdapat suatu titik $v \in V(G)$ dan suatu himpunan $S \subset V(G)$. Jarak dari titik v ke himpunan S, dinotasikan dengan $d(v, S)$ didefinisikan sebagai $d(v, S) = \min\{d(v, x)|\ x \in S\}$ dimana, $d(v, x)$ adalah jarak dari titik v ke x. Definisikan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ sebagai himpunan yang berisikan k-partisi, maka representasi dari v terhadap Π didefinisikan sebagai $r(v|\Pi) = (d(v, S_1), d(v, S_2), \cdots, d(v, S_k))$. Jika Π merupakan partisi pembeda dari $V(G)$, yaitu $r(v|\Pi) \neq r(x|\Pi)$ untuk setiap dua titik berbeda $v, x \in V(G)$, maka Π disebut partisi penyelesaian *(resolving partition)* graf G. Kardinalitas dari partisi penyelesaian minimum disebut dimensi partisi dari G, ditulis $pd(G)$.

Misalkan P_m adalah graf lintasan orde m dan $K_{1,n}$ adalah graf bintang orde $n + 1$, dengan $m, n \geq 1$. Graf hasil korona $G = P_m \odot K_{1,n}$ mempunyai m buah graf bintang $K_{1,n}$. Untuk penyederhanaan, graf bintang ke-i dinotasikan dengan H_i untuk suatu i dalam selang $[1, m]$. Graf hasil korona $G \cong P_m \odot K_{1,n}$ terdiri atas himpunan titik $V(G) = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\} \cup \{c_i, a_{ij}|1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{x_i a_{ij}, x_i c_i|1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \cup \{c_i a_{ij}|1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n + 1\} \cup \{x_i x_{i+1}|1 \leq i \leq m - 1\}$.

Pandang subgraf $x_i \odot H_i \subset P_m \odot K_{1,n}$. Karena jarak $d(c_i, v) = 1$ untuk semua titik $v \in V(x_i \odot H_i) \setminus \{c_i\}$ dan jarak $d(x_i, v) = 1$ untuk semua titik $v \in V(x_i \odot H_i) \setminus \{x_i\}$, maka x_i dan c_i disebut titik pusat dari subgraf $x_i \odot H_i$.



Gambar 1. Graf $G \cong P_m \odot K_{1,n}$

Pada Teorema 2.1. akan ditentukan dimensi partisi dari graf lintasan korona graf bintang $P_m \odot K_{1,n}$.

Teorema 2.1. [3] *Misalkan P_m adalah graf lintasan dengan orde m dan $K_{1,n}$ adalah graf bintang dengan orde $n + 1$. Untuk $m \geq 1, n \geq 3$, dimensi partisi dari* *graf $P_m \odot K_{1,n}$, adalah sebagai berikut:*

$$pd(P_m \odot K_{1,n}) = \begin{cases} n, & \textit{jika } m \le \lfloor n/2 \rfloor; \\ n+1, & \textit{jika } m > \lfloor n/2 \rfloor. \end{cases}$$

Bukti. Pandang dua kasus berikut,
Kasus 1 Untuk $m \le \lfloor n/2 \rfloor$,

Untuk sebarang dua titik berbeda $u, v \in V(H_i) \setminus \{c_i\}$, untuk sebuah i dalam selang $[1, m]$, $d(u, w) = d(v, w)$, untuk semua $w \in V(H_i) \setminus \{u, v\}$. Maka berdasarkan Lema 1, titik u dan v harus termuat dalam kelas partisi yang berbeda. Jadi, subgraf $H_i \subset (P_m \odot K_{1,n})$ mempunyai sedikitnya n buah kelas partisi. Oleh karena itu, $pd(P_m \odot K_{1,n}) \ge n$.

Selanjutnya, definisikan suatu partisi penyelesaian $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ dari graf $P_m \odot K_{1,n}$ sedemikian sehingga:

$$S_k = \begin{cases} \{c_k, a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{mk}\}, & \text{jika } 1 \le k \le m; \\ \{x_{k-m}, a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{mk}\}, & \text{jika } m < k \le 2m; \\ \{a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{mk}\}, & \text{jika } 2m < k \le n; \end{cases}$$

Akan ditunjukkan bahwa untuk sebarang dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ yang berada di partisi yang sama, berlaku $r(u|\Pi) \ne r(v|\Pi)$. Jika $u = a_{ij}$ dan $v = c_i$ (atau $v = x_i$), untuk suatu j dalam selang $[1, n]$, maka $2 = d(u, S) \ne d(v, S) = 1$ dimana S adalah kelas partisi di Π yang tidak memuat baik titik pusat c_i maupun x_i. Oleh karena itu, representasi $r(u|\Pi) \ne r(v|\Pi)$. Selanjutnya, jika $u = a_{il}$ dan $v = a_{im}$, untuk $1 \le l \ne m \le n$, maka $d(u, S_l) = 1$ dan $d(u, S_m) = 2$ (atau $d(v, S_l) = 2$ dan $d(v, S_m) = 1$). Oleh karena itu, $r(u|\Pi) \ne r(v|\Pi)$. Dengan demikian, setiap titik $v \in V(G)$ mempunyai representasi unik. Jadi, $pd(G) \le n$.
Kasus 2 Untuk $m > \lfloor n/2 \rfloor$.

Misalkan $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ adalah suatu partisi pembeda dari graf G. Suatu titik v di $V(G)$ didefinisikan sebagai titik dominan apabila $d(v, S_i) = 1$ untuk semua kelas partisi $S_i \in \Pi$ yang tidak memuat v. Dengan demikian, setiap titik pusat, yaitu c_i dan x_i, adalah titik dominan di graf G. Karena $m > \lfloor n/2 \rfloor$, maka graf G mempunyai sedikitnya $n + 1$ titik dominan. Oleh karena itu, terdapat sedikitnya dua titik pusat, katakan x_i dan c_i, termuat dalam kelas partisi yang sama. Dengan demikian, $r(x|\Pi) = r(c|\Pi)$, suatu kontradiksi. Jadi, $pd(G) \ge n + 1$.

Selanjutnya, definisikan suatu partisi $\Pi = \{S_1, S_2, \cdots, S_k\}$ dari graf G sedemikian hingga:

$$S_k = \begin{cases} \{c_1, c_2, \cdots, c_m, a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1}\}, & \text{jika } k = 1; \\ \{x_1, x_2, \cdots, x_{m-1}, a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{m2}\}, & \text{jika } k = 2; \\ \{a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{mk}\}, & \text{jika } 3 \le k \le n; \\ \{x_m\} & \text{jika } k = n + 1; \end{cases}$$

Pandang sebarang dua titik berbeda $u, v \in V(G)$ sedemikian hingga $u, v \in S_i$ untuk sebuah i. Jika $u = a_{ij}$ dan $v = c_i$ (atau $v = x_i$), untuk $1 \le j \le n$, maka jarak $d(u, S) = 2$ dan $d(v, S) = 1$, dengan S adalah kelas partisi di Π yang tidak memuat titik c_l maupun x_l. Oleh karena itu $r(u|\Pi) \ne r(v|\Pi)$. Selanjutnya, jika $u = a_{li}$ dan $v = a_{mi}$, dengan $1 \le l \ne m \le n$ (karena $d(u, S_{n+1}) \ne d(v, S_{n+1})$)

maka $r(u|\Pi) \neq r(v|\Pi)$. Selanjutnya, karena jarak $d(c_k, S_{n+1}) \neq d(c_l, S_{n+1})$, dengan $k \neq l$, setiap titik pusat di graf G mempunyai representasi yang berbeda. Dengan demikian diperoleh bahwa batas atas partisi dimensi G adalah $pd(G) \leq n+1$ untuk $m > \lfloor n/2 \rfloor$. $\square$ $\square$

3. Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Bapak Narwen, Ibu Hazmira Yozza M.Si dan Bapak Budi Rudianto, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga artikel ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Chartrand, G., Salehi, E. dan Zhang, P. 2000. The Partition Dimension of Resolvability in Graphs. *Aequationes Mathematicae.* **59**: 45 – 54.
[2] Chartrand, G., Zhang, P. dan Salehi, E. 1998. On the Partition Dimension of a Graph. *Congressus Numerantium.* **130**: 157 – 160.
[3] Darmaji. 2011. Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung. *Disertasi Doktor pada Institut Teknologi Bandung*: tidak diterbitkan.
[4] Javaid, I., Shokat, S. 2008. On the Partition Dimension of some Wheel Related Graphs. *Journal of Prime Research in Mathematics.* **4**: 154 – 164.
[5] Tomescu, I. 2008. Discrepancies between Metric Dimension and Partition Dimension of a Connected Graphs. *Discrete Mathematics.* **308**: 5026 – 5031.