Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VI** No. **2** Hal. 34 – 42
ISSN : 2303–291X

SOLUSI SISTEM PERSAMAAN MATRIKS FUZZY

AHMAD SURYA, ADMI NAZRA, NARWEN
Program Studi Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : ahmadsurya996@gmail.com

Abstrak. Sistem linier fuzzy merupakan salah satu aplikasi pokok dari aritmatika bilangan fuzzy. Sistem persamaan matriks fuzzy dibentuk dari sejumlah sistem linier fuzzy yang solusinya dapat dicari dengan menggunakan berbagai metode. Masalah pada sistem persamaan matriks fuzzy terletak pada entri-entrinya yang merupakan bilangan fuzzy, sehingga tidak dapat diselesaikan dengan cara seperti pada matriks dengan entri-entrinya yang merupakan bilangan riil biasa. Sistem persamaan matriks fuzzy dapat diselesaikan dengan menggunakan metode Friedman dan metode yang diberikan oleh Mahmood Otadi dan Maryam Mosleh. Sistem persamaan matriks fuzzy yang diselesaikan dengan metode yang diberikan oleh Mahmod Otadi dan Maryam Mosleh terbukti lebih efisien.

Kata Kunci: Sistem linier fuzzy, Aritmatika bilangan fuzzy, Bilangan fuzzy, Sistem persamaan matriks fuzzy

1. Pendahuluan

Dalam kehidupan ada beberapa hal yang kurang tepat dalam pengambilan keputusan atau pemberi penilaian terhadap suatu objek tertentu. Misalnya dikategorikan bahwa ponsel pintar dengan harga Rp 2.000.000,- atau lebih termasuk ke dalam ponsel pintar mahal. Ini berarti ponsel pintar dengan harga Rp 2.000.000,- adalah ponsel pintar mahal, lalu bagaimana dengan ponsel pintar dengan harga Rp 1.990.000,- yang tidak termasuk ke dalam ponsel pintar mahal. Ada kekurang tepatan sebenarnya dalam pemberian kategori pada permasalahan ini. Oleh karena itu digunakan bilangan fuzzy dalam mengatasi masalah-masalah seperti ini. Konsep bilangan fuzzy ini pertama kali diperkenalkan oleh Zadeh [8], Dubois dan Prade [3].

Konsep bilangan fuzzy dan aritmatika fuzzy terus berkembang hingga saat ini. Salah satu aplikasi pokok dari aritmatika bilangan fuzzy adalah menyelesaikan sistem linier fuzzy [1]. Friedman, dkk [5] memperkenalkan suatu model umum untuk menyelesaikan sebuah sistem linier fuzzy $n \times n$ yang koefisien matriksnya adalah bilangan rill, dan matriks pada sisi sebelah kanan adalah sebuah vektor bilangan fuzzy sebarang. Friedman, dkk menggunakan bentuk parameter bilangan fuzzy dan mengganti sistem linier fuzzy $n \times n$ yang awal dengan suatu sistem linier $2n \times 2n$ rill.

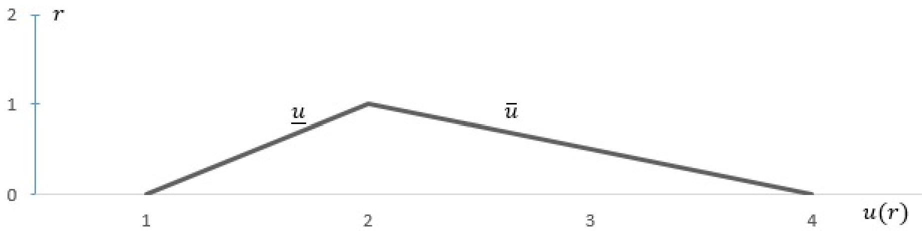
Pada jurnal ini, akan dibahas tentang suatu metode baru yang diperkenalkan oleh Mahmood Otadi dan Maryam Mosleh [7] untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan matriks fuzzy $n \times n$. Metode baru ini lebih baik dari metode sebelumnya yang diperkenalkan oleh Friedman, dkk yang akan dibahas juga pada jurnal ini. Metode baru ini digunakan dengan menerapkan metode yang diberikan oleh Cong-Xin dan Min [2]. Penulisan ini merupakan kajian kembali dari jurnal Mahmood Otadi dan Maryam Mosleh dengan judul *Solution of fuzzy matrix equation system.*

2. Bilangan Fuzzy dan Aritmatika Fuzzy

Suatu bilangan fuzzy u dalam bentuk parameter adalah pasangan terurut dari fungsi $[\underline{u}(r), \overline{u}(r)],\ 0 \leq r \leq 1$, yang memenuhi syarat-syarat berikut:

(a) Fungsi $\underline{u}(r)$ monoton naik, terbatas, dan kontinu kiri pada [0, 1],
(b) Fungsi $\overline{u}(r)$ monoton turun, terbatas, dan kontinu kiri pada [0, 1], dan
(c) $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$ untuk setiap r dalam [0, 1].

Contoh bilangan fuzzy u dalam bentuk parameter seperti berikut $[\underline{u}(r), \overline{u}(r)] = [1 + r, 4 - 2r]$.



Gambar 1. Grafik bilangan u

Untuk bilangan-bilangan fuzzy $x = [\underline{x}(r), \overline{x}(r)], y = [\underline{y}(r), \overline{y}(r)]$, dan bilangan riil k, penjumlahan dan perkalian skalar dari bilangan *fuzzy* didefinisikan sebagai berikut:

1. $x = y$ jika dan hanya jika $\underline{x}(r) = \underline{y}(r)$ dan $\overline{x}(r) = \overline{y}(r)$, $0 \leq r \leq 1$
2. $x + y = [\underline{x}(r) + \underline{y}(r), \overline{x}(r) + \overline{y}(r)]$, dan
3. $kx = [k\underline{x}, k\overline{x}], k \geq 0,\ kx = [k\overline{x}, k\underline{x}], k < 0.$

3. Sistem Linier Fuzzy dan Metode Penyelesaiannya oleh Friedman

Sistem linier $n \times n$ di bawah ini adalah sistem linier fuzzy

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

dengan koefisien-koefisien $a_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, n$ yang diketahui adalah bilangan riil, $y_i = [\underline{y}_i, \overline{y}_i]$ yang diketahui adalah elemen dari E, $i = 1, 2, \cdots, n$, dan $x_j = [\underline{x}_j, \overline{x}_j]$

yang tidak diketahui atau yang akan dicari adalah elemen dari E, $j = 1, 2, \cdots, n$. Sistem linier fuzzy dalam notasi matriks ditulis sebagai berikut

$$AX = Y \tag{3.1}$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} [\underline{x}_1, \overline{x}_1] \\ [\underline{x}_2, \overline{x}_2] \\ \vdots \\ [\underline{x}_n, \overline{x}_n] \end{pmatrix} \, dan \; Y = \begin{pmatrix} \left[\underline{y}_1, \overline{y}_1\right] \\ \left[\underline{y}_2, \overline{y}_2\right] \\ \vdots \\ \left[\underline{y}_n, \overline{y}_n\right] \end{pmatrix}$$

Suatu vektor bilangan fuzzy $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ yang diberikan oleh

$$x_j = [\underline{x}_j(r), \overline{x}_j(r)]; j = 1, 2, \cdots, n, 0 \leq r \leq 1$$

disebut solusi sistem linier fuzzy (3.1) jika

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underline{x_j} = \underline{y_i}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{x_j} = \overline{y_i}$$

Untuk mendapatkan solusi dari sistem linier fuzzy Friedman, dkk mengembangkan matriks A yang berukuran $n \times n$ menjadi suatu matriks nonnegatif yang berukuran $2n \times 2n$. Sehingga sistem liner fuzzy $AX = Y$ menjadi sebagai berikut:

$$S\hat{X} = \hat{Y} \tag{3.2}$$

dengan

$$S = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}, \hat{X} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \\ -\overline{x}_1 \\ \vdots \\ -\overline{x}_n \end{pmatrix}, dan \; \hat{Y} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \\ -\overline{y}_1 \\ \vdots \\ -\overline{y}_n \end{pmatrix}$$

dimana matriks $B_{n\times n}$ berisi entri-entri positif dari matrik $A_{n\times n}$ selainnya bernilai nol, dan matriks $C_{n\times n}$ berisi nilai mutlak dari entri-entri negatif matriks $A_{n\times n}$ dan selainnya bernilai nol. Sehingga ini berarti, $A_{n\times n} = B_{n\times n} - C_{n\times n}$. Entri-entri dari matriks $S_{2n\times 2n}$ yang dibentuk dari matriks $B_{n\times n}$ dan matriks $C_{n\times n}$ bernilai positif atau nol, sehingga matriks $S_{2n\times 2n}$ disebut juga sebagai matriks nonnegatif.

Teorema 3.1. *[5] Matriks $S_{2n\times 2n}$ nonsingular jika dan hanya jika matriks-matriks $A_{n\times n} = B_{n\times n} - C_{n\times n}$ dan $B_{n\times n} + C_{n\times n}$ keduanya adalah nonsingular.*

Bukti. Dengan menambahkan baris ke-$(n+i)$ dari matriks S pada baris ke-i untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ diperoleh

$$S = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B+C & B+C \\ C & B \end{pmatrix} = S_1.$$

Selanjutnya, dengan mengurangkan kolom ke-j dari S_1 pada kolom ke-$(n+j)$ untuk $j = 1, 2, \cdots, n$, dan diperoleh

$$S_1 = \begin{pmatrix} B+C & B+C \\ C & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B+C & 0 \\ C & B-C \end{pmatrix} = S_2.$$

Secara jelas, $|S| = |S_1| = |S_2| = |B + C||B - C| = |B + C||A|$. Oleh karena itu $|S| \neq 0$ jika dan hanya jika $|A| \neq 0$ dan $|B + C| \neq 0$, sehingga secara jelas teorema ini terbukti. $\square$

Teorema 3.2. *[5] Invers dari matriks nonnegatif*

$$S = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$$

adalah

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} D & E \\ E & D \end{pmatrix}$$

dimana

$$D = \frac{1}{2}\left[(B+C)^{-1} + (B-C)^{-1}\right], \quad E = \frac{1}{2}\left[(B+C)^{-1} - (B-C)^{-1}\right].$$

Bukti. Untuk membuktikan S^{-1} adalah invers dari S maka haruslah

$$SS^{-1} = I.$$

Ini berarti

$$\begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & E \\ E & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

dari persamaan di atas diperoleh

$$BD + CE = I \tag{3.3}$$

$$CD + BE = 0. \tag{3.4}$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan (3.3) dan (3.4) maka diperoleh

$$D + E = (B + C)^{-1}. \tag{3.5}$$

Dengan mengurangkan kedua persamaan (3.3) dan (3.4) maka diperoleh

$$D - E = (B - C)^{-1}. \tag{3.6}$$

Dari persamaan (3.5) dan persamaan (3.6) diperoleh

$$E = (B + C)^{-1} - D,$$

$$E = D - (B - C)^{-1}.$$

Dengan mensubstitusikan persamaan pertama ke persamaan kedua dari persamaan di atas diperoleh

$$D = \frac{1}{2}[(B+C)^{-1} + (B-C)^{-1}].$$

Dari persamaan (3.5) dan persamaan (3.6) juga diperoleh

$$D = (B+C)^{-1} - E,$$
$$D = (B-C)^{-1} + E.$$

Dengan mensubstitusikan persamaan pertama ke persamaan kedua dari persamaan di atas diperoleh

$$E = \frac{1}{2}[(B+C)^{-1} - (B-C)^{-1}].$$

Oleh karena itu, dengan mengambil $D = \frac{1}{2}[(B+C)^{-1} + (B-C)^{-1}]$ dan $E = \frac{1}{2}[(B+C)^{-1} - (B-C)^{-1}]$ maka $S^{-1} = \begin{pmatrix} D & E \\ E & D \end{pmatrix}$ adalah invers dari $S = \begin{pmatrix} B & C \\ C & B \end{pmatrix}$. $\square$

Akibat 3.3. *Solusi dari (3.2) diperoleh dari*

$$\hat{X} = S^{-1}\hat{Y},$$

dengan

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1 \\ \vdots \\ \underline{x}_n \\ -\overline{x}_1 \\ \vdots \\ -\overline{x}_n \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} D & E \\ E & D \end{pmatrix} \text{ dan } \hat{Y} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \vdots \\ \underline{y}_n \\ -\overline{y}_1 \\ \vdots \\ -\overline{y}_n \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{1}{2}\left[(B+C)^{-1} + (B-C)^{-1}\right], \quad E = \frac{1}{2}\left[(B+C)^{-1} - (B-C)^{-1}\right].$$

4. Sistem Persamaan Matriks Fuzzy dan Metode Penyelesaiannya

Suatu sistem matriks seperti berikut ini

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

dimana a_{ij}, adalah bilangan rill, anggota y_{ij} pada sisi kanan adalah bilangan fuzzy, dan anggota x_{ij} adalah anggota yang tidak diketahui, dengan $i, j = 1, 2, \cdots, n$ disebut suatu sistem persamaan matriks fuzzy. Dengan menggunakan notasi matriks sistem persamaan matriks fuzzy di atas dapat ditulis sebagai berikut :

$$A\tilde{X} = \tilde{Y} \tag{4.1}$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tilde{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \textit{dan}$$

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

Suatu matriks bilangan fuzzy

$$\tilde{X} = (x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_n)$$

dengan

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}, \textit{dan } x_n = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix},$$

disebut sebuah solusi dari sistem matriks fuzzy (4.1) jika

$$Ax_j = y_j, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

Teorema 4.1. [7] *Misalkan bahwa invers dari matriks A ada dan $x_j = (x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj})^T$ adalah solusi dari persamaan (4.1). Maka $\underline{x_j} + \overline{x_j} = (\underline{x_{1j}} + \overline{x_{1j}}, \underline{x_{2j}} + \overline{x_{2j}}, \cdots, \underline{x_{nj}} + \overline{x_{nj}})^T$ adalah solusi dari sistem-sistem berikut :*

$$A(\underline{x_j} + \overline{x_j}) = (\underline{y_j} + \overline{y_j}), \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

dimana $\underline{y_j} + \overline{y_j} = (\underline{y_{1j}} + \overline{y_{1j}}, \underline{y_{2j}} + \overline{y_{2j}}, \cdots, \underline{y_{nj}} + \overline{y_{nj}})^T \quad j = 1, 2, \cdots, n.$

Bukti. Misalkan bentuk parameter dari x_{ij} adalah $x_{ij} = [\underline{x}_{ij}, \overline{x}_{ij}], i, j = 1, 2, \cdots, n$ dan misalkan entri-entri dari matriks A sebagai $a_{ij} = a'_{ij} - a''_{ij}$ sedemikian sehingga a'_{ij} dan a''_{ij} adalah positif. Mengingat persamaan (4.1) yaitu $A\tilde{X} = \tilde{Y}$, dari persamaan ini untuk $j = 1, 2, \cdots, n$ dan untuk $i = 1, 2, \cdots, n$ diperoleh

$$a_{i1}x_{1j} + a_{i2}x_{2j} + \cdots + a_{in}x_{nj} = y_{ij}.$$

Persamaan di atas dalam bentuk parameter akan menjadi seperti di bawah ini

$$(a'_{i1} - a''_{i1})(\underline{x}_{1j}, \overline{x}_{1j}) + (a'_{i2} - a''_{i2})(\underline{x}_{2j}, \overline{x}_{2j}) + \cdots + (a'_{in} - a''_{in})(\underline{x}_{nj}, \overline{x}_{nj}) = (\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}).$$

Kemudian persamaan di atas menjadi seperti berikut
$(a'_{i1}\underline{x}_{1j} - a''_{i1}\overline{x}_{1j} + a'_{i2}\underline{x}_{2j} - a''_{i2}\overline{x}_{2j} + \cdots + a'_{in}\underline{x}_{nj} - a''_{in}\overline{x}_{1j}, a'_{i1}\overline{x}_{1j} - a''_{i1}\underline{x}_{1j} + a'_{i2}\overline{x}_{2j} - a''_{i2}\underline{x}_{2j} + \cdots + a'_{in}\overline{x}_{nj} - a''_{in}\underline{x}_{nj}) = (\underline{y}_{ij}, \overline{y}_{ij}).$
Lalu persamaan di atas dipisah menjadi dua buah persamaan di bawah ini

$$a'_{i1}\underline{x}_{1j} - a''_{i1}\overline{x}_{1j} + a'_{i2}\underline{x}_{2j} - a''_{i2}\overline{x}_{2j} + \cdots + a'_{in}\underline{x}_{nj} - a''_{in}\overline{x}_{1j} = \underline{y}_{ij}$$

dan

$$a'_{i1}\overline{x}_{1j} - a''_{i1}\underline{x}_{1j} + a'_{i2}\overline{x}_{2j} - a''_{i2}\underline{x}_{2j} + \cdots + a'_{in}\overline{x}_{nj} - a''_{in}\underline{x}_{nj} = \overline{y}_{ij}.$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan di atas diperoleh persamaan di bawah ini $(a'_{i1}-a''_{i1})(\underline{x}_{1j}+\overline{x}_{1j})+(a'_{i2}-a''_{i2})(\underline{x}_{2j}+\overline{x}_{2j})+\cdots+(a'_{in}-a''_{in})(\underline{x}_{nj}+\overline{x}_{nj}) = (\underline{y}_{ij}+\overline{y}_{ij})$. Sehingga diperolehlah persamaan di bawah ini

$$a_{i1}(\underline{x}_{1j} + \overline{x}_{1j}) + a_{i2}(\underline{x}_{2j} + \overline{x}_{2j}) + \cdots + a_{in}(\underline{x}_{nj} + \overline{x}_{nj}) = (\underline{y}_{ij} + \overline{y}_{ij}).$$

Oleh karena itu

$$\underline{x_j} + \overline{x_j} = (\underline{x_{j}}_1 + \overline{x_j}_1, \underline{x_{j}}_2 + \overline{x_j}_2, \cdots, \underline{x_{j}}_n + \overline{x_j}_n)^T$$

adalah solusi dari

$$A(\underline{x_j} + \overline{x_j}) = (\underline{y_j} + \overline{y_j}), \quad j = 1, 2, \cdots, n. \qquad \square$$

Untuk menyelesaikan sistem persamaan matriks fuzzy (4.1), akan digunakan sistem pada Teorema (4.1). Ini artinya sistem persamaan matriks fuzzy (4.1) harus diubah terlebih dahulu menjadi sistem seperti berikut ini:

$$\begin{aligned}
&a_{11}(\underline{x}_{1j} + \overline{x}_{1j}) + \cdots + a_{1n}(\underline{x}_{nj} + \overline{x}_{nj}) = (\underline{y}_{1j} + \overline{y}_{1j}),\\
&a_{21}(\underline{x}_{1j} + \overline{x}_{1j}) + \cdots + a_{2n}(\underline{x}_{nj} + \overline{x}_{nj}) = (\underline{y}_{2j} + \overline{y}_{2j}),\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&a_{n1}(\underline{x}_{1j} + \overline{x}_{1j}) + \cdots + a_{nn}(\underline{x}_{nj} + \overline{x}_{nj}) = (\underline{y}_{nj} + \overline{y}_{nj}),\\
&j = 1, 2, \cdots, n.
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan notasi matriks persamaan di atas dapat ditulis seperti berikut

$$A(\underline{X} + \overline{X}) = (\underline{Y} + \overline{Y}), \tag{4.2}$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\underline{X} + \overline{X} = \begin{pmatrix} \underline{x}_{11} + \overline{x}_{11} & \underline{x}_{12} + \overline{x}_{12} & \cdots & \underline{x}_{1n} + \overline{x}_{1n} \\ \underline{x}_{21} + \overline{x}_{21} & \underline{x}_{22} + \overline{x}_{22} & \cdots & \underline{x}_{2n} + \overline{x}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{x}_{n1} + \overline{x}_{n1} & \underline{x}_{n2} + \overline{x}_{n2} & \cdots & \underline{x}_{nn} + \overline{x}_{nn} \end{pmatrix} \textit{dan}$$

$$\underline{Y} + \overline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{y}_{11} + \overline{y}_{11} & \underline{y}_{12} + \overline{y}_{12} & \cdots & \underline{y}_{1n} + \overline{y}_{1n} \\ \underline{y}_{21} + \overline{y}_{21} & \underline{y}_{22} + \overline{y}_{22} & \cdots & \underline{y}_{2n} + \overline{y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \underline{y}_{n1} + \overline{y}_{n1} & \underline{y}_{n2} + \overline{y}_{n2} & \cdots & \underline{y}_{nn} + \overline{y}_{nn} \end{pmatrix}$$

Selanjutnya dimisalkan bahwa solusi dari (4.2) sebagai

$$d_j = \underline{x_j} + \overline{x_j} = \begin{bmatrix} \underline{x}_{1j} + \overline{x}_{1j} \\ \underline{x}_{2j} + \overline{x}_{2j} \\ \vdots \\ \underline{x}_{nj} + \overline{x}_{nj} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \cdots, n. \tag{4.3}$$

dan dimisalkan $D = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$, sehingga $D = \underline{X} + \overline{X}$. Karena

$$A(\underline{X} + \overline{X}) = (\underline{Y} + \overline{Y})$$

maka

$$D = A^{-1}(\underline{Y} + \overline{Y}). \tag{4.4}$$

Misalkan matriks $B_{n\times n}$ adalah matriks yang memuat entri-entri positif dari matriks $A_{n\times n}$, entri-entri selainnya bernilai nol dan misalkan matriks $C_{n\times n}$ adalah matriks yang memuat nilai mutlak entri-entri negatif dari entri-entri matriks $A_{n\times n}$,yang berarti $A_{n\times n} = B_{n\times n} - C_{n\times n}$. Sekarang dengan menggunakan notasi matriks pada (4.1) yaitu $AX = Y$, diperoleh $(B - C)X = Y$ yang dalam bentuk parameter adalah $(B - C)(\underline{X}(r) + \overline{X}(r)) = (\underline{Y}(r) + \overline{Y}(r))$. Kemudian sistem ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$B\underline{X}(r) - C\overline{X}(r) = \underline{Y}(r),$$
$$B\overline{X}(r) - C\underline{X}(r) = \overline{Y}(r).$$

Dengan mensubstitusikan $\overline{X}(r) = D - \underline{X}(r)$ dan $\underline{X}(r) = D - \overline{X}(r)$ ke dalam persamaan pertama dan kedua dari sistem di atas, secara berturut-turut diperoleh

$$(B + C)\underline{X}(r) = \underline{Y}(r) + CD,$$
$$(B + C)\overline{X}(r) = \overline{Y}(r) + CD.$$

Oleh karena itu diperoleh persamaan berikut ini

$$\begin{aligned} \underline{X}(r) &= (B + C)^{-1}(\underline{Y}(r) + CD), \\ \overline{X}(r) &= (B + C)^{-1}(\overline{Y}(r) + CD). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Sehingga kita dapat menyelesaikan sistem persamaan matriks fuzzy (4.1) dengan menyelesaikan persamaan-persamaan (4.2)-(4.5).

5. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada sebelumnya solusi dari sistem persamaan matriks fuzzy $n \times n$ dapat ditemukan dengan menggunakan metode Friedman, dkk [5] dan metode baru yang diperkenalkan oleh Mahmood Otadi dan Maryam Mosleh [7]. Dengan menggunakan metode baru ini sistem persamaan matriks fuzzy $n \times n$ dapat diselesaikan dengan cara yang lebih sederhana dan efisien, bahkan untuk sistem persamaan matriks fuzzy $n \times n$ yang lebih besar.

Sebagai saran dapat dibahas tentang perbandingan antara metode-metode dalam penyelesaian sistem persamaan matriks fuzzy $n \times n$.

6. Ucapan Terimakasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Yanita, Ibu Dr. Shelvi Ekariani dan Bapak Syafruddin, M.Si yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Allahviranloo, T. 2003. Comment on fuzzy linier systems. *Fuzzy Sets and Systems.* **140**: 559

[2] Cong-Xin, W. and M. Ming. 1991. Embedding problem of fuzzy number space: I. *Fuzzy Sets and Systems.* **44**: 33 – 38

[3] Dubois, D and H. Prade. 1978. Operations on fuzzy numbers. *International journal of systems science.* **9**: 613 – 626

[4] Ezzati, R. 2011. Solving fuzzy linier systems. *Soft Computing.* **15**: 193 – 197

[5] Friedman, M., M. Ming. and A. Kandel. 1998. Fuzzy linier systems. *Fuzzy sets and Systems.* **96**: 201 – 209

[6] Ming, M. M. Friedman. and A. Kandel. 1999. A new fuzzy arithemetic. *Fuzzy Sets and Systems.* **108**: 83 – 90

[7] Otadi, M. and M. Mosleh. 2012. Solution of fuzzy matrix equation system. *International of Mathematics and Mathematical Sciences.* Firoozkooh

[8] Zadeh, L.A. 1975. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *Information sciences.* **8**: 199 – 249