Jurnal Matematika UNAND
Vol. **VII** No. **3** Hal. 9 – 15
ISSN : 2303–291X

KARAKTERISTIK PERMUKAAN REGULAR DI $\mathbb{R}^n$

ARDHIAN MAGHFIRAH, HARIPAMYU, EFENDI
Program Studi S1 Matematika,
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Kampus UNAND Limau Manis Padang, Indonesia,
email : ardhian464@gmail.com

Abstrak. Secara umum, permukaan dapat dikatakan sebagai bagian dari $\mathbb{R}^3$, dimana untuk setiap titik p di suatu lingkungan tertentu di $\mathbb{R}^3$ yang dimisalkan dengan S, terdapat suatu himpunan buka di $\mathbb{R}^2$ yang dimisalkan dengan U dan suatu himpunan buka di $\mathbb{R}^3$ yang dimisalkan dengan W yang memuat p sedemikian sehingga $S \cap W$ homeomorfik pada U. Selanjutnya, suatu permukaan disebut sebagai permukaan regular apabila terdapat suatu pemetaan $\mathbf{x}$ dari $U \in \mathbb{R}^2$ ke $S \cap W \in \mathbb{R}^3$ yang terdiferensial dan pemetaan tersebut memiliki turunan ($d\mathbf{x}$) yang satu-satu untuk setiap titik di U. Untuk lebih memahami apa itu permukaan regular, pada makalah ini akan dijelaskan definisi dari permukaan regular dan apa saja karakteristik dari permukaan regular tersebut khususnya karakteristik dari suatu permukaan regular di $\mathbb{R}^3$.

Kata Kunci: Lingkungan, terdiferensial, himpunan buka, pemetaan, homeomorfik, permukaan, permukaan regular

Diterima	:	*26 Juli 2018*
Direvisi	:	*17 September 2018*
Dipublikasikan	:	*21 Desember 2018*

1. Pendahuluan

Geometri diferensial adalah sebuah disiplin Matematika yang menggunakan teknik-teknik kalkulus diferensial dan kalkulus integral, juga aljabar linear dan aljabar multilinear dalam masalah-masalah kajian geometri. Jika berbicara tentang Geometri, maka hal yang terlintas didalam fikiran pertama kali adalah kurva, bidang, ruang dan permukaan. Bicara tentang kurva, studi tentang kurva pada bidang diawali oleh Descartes pada tahun 1600-an, setelah dia menciptakan sumbu koordinat Cartesius. Dalam Geometri, jelas kurva merupakan satu objek penting selain permukaan. Teori kurva ruang dan bidang dalam ruang Euklides tiga dimensi membentuk basis untuk pengembangan Geometri Diferensial pada abad ke-18 dan abad ke-19. [3]

Salah satu prestasi yang sangat besar dan menjadi peran penting dalam pengembangan geometri differensial adalah studi yang diprakarsai oleh Carl Friedrich Gauss, yaitu tentang Kelengkungan Gaussian, dimana ia menunjukkan bahwa kelengkungan adalah salah satu sifat intrinsik dari suatu permukaan.

Untuk membahas sifat permukaan tersebut diperlukan suatu definisi tentang permukaan yang disebut permukaan regular. Oleh karena itu pada penelitian ini akan dibahas tentang konsep permukaan regular. Jika suatu permukaan adalah permukaan regular, maka dapat didefinisikan suatu fungsi terdiferensial di suatu titik pada permukaan tersebut [2]. Maka dari itu, pada penelitian kali ini akan dijelaskan karakteristik dari suatu permukaan, khusunya karakteristik permukaan regular di $\mathbb{R}^3$.

2. Landasan Teori

2.1. *Kekontinuan di* $\mathbb{R}^n$

Definisi 2.1. *[2] Suatu bola buka di* $\mathbb{R}^n$ *dengan pusat* $p_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0)$ *dan jari-jari* $\epsilon > 0$ *adalah himpunan*

$$\mathbf{B}_\epsilon(p_0) = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \ (x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2 < \epsilon^2)\}.$$

Suatu himpunan $U \subset \mathbb{R}^n$ dikatakan himpunan buka jika untuk setiap $p \in U$ terdapat $\mathbf{B}_\epsilon(p) \subset U$. [2]

Definisi 2.2. *Suatu pemetaan* $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *dikatakan kontinu di* $p \in U$ *jika diberikan* $\epsilon > 0$*, maka terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga*

$$F(\mathbf{B}_\delta(p)) \subset \mathbf{B}_\epsilon(F(p)).$$

Kemudian pemetaan F dikatakan kontinu jika F kontinu pada setiap titik di U. Gabungan dari fungsi kontinu juga kontinu. Melihat pada Definisi 2.1, maka pernyataan berikut ekuivalen ; F kontinu jika dan hanya jika untuk setiap himpunan buka V dari $\mathbb{R}^n$, terdapat himpunan buka U dari $\mathbb{R}^m$ sedemikian sehingga F dipetakan dari $U \cap X$ ke $V \cap Y$. [2]

2.2. *Keterdiferensialan di* $\mathbb{R}^n$

Misal diberikan suatu pemetaan $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dimana U buka di $\mathbb{R}^n$, maka $\mathbf{F}$ dikatakan terdiferensial di $p \in U$ jika setiap komponen dari fungsi $\mathbf{F}(p)$ terdiferensial di p, yaitu dapat ditulis

$$\mathbf{F}(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n)),$$

dimana fungsi $f_i, \ i = 1, \cdots, m$, memiliki turunan parsial yang kontinu di p. $\mathbf{F}$ dikatakan terdiferensial di U jika $\mathbf{F}$ terdiferensial pada setiap titik di U. [2]

Definisi 2.3. *[2] Suatu kurva parameter yang terdiferensial adalah suatu pemetaan* $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *yang terdiferensial, dimana* $I = (a, b)$ *buka di* $\mathbb{R}$.

Definisi 2.4. *[3] Jika* $U, V \subseteq R^n$ *buka dan* $F : U \to V$*, maka* F *disebut difeomorfisma jika* F *terdiferensial dan mempunyai invers* $F^{-1} : V \to U$ *yang juga terdiferensial. jika difeomorfisma* F *ini ada, subhimpunan* U *dan* V *dikatakan difeomorfik.*

Definisi 2.5. *[3] Misalkan* U *buka di* $\mathbb{R}^2$*, pemetaan* $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to V \cap S \subset \mathbb{R}^3$*, dikatakan sebuah homeomorfisma jika pemetaan* $\mathbf{x}$ *kontinu dan mempunyai pemetaan balikan* $\mathbf{x}^{-1} : V \cap S \to U$ *yang juga kontinu, artinya ada* $W \subset R^n$ *buka yang memuat* $V \cap S$ *dan suatu pemetaan kontinu* $\mathbf{F} : W \to R^2$ *sehingga* $\mathbf{x}^{-1}$ *adalah restriksi* $\mathbf{F}$ *pada* $V \cap S$.

Teorema 2.6. *[3] **Teorema Fungsi Invers** Misalkan $U \subseteq \mathbb{R}^n$ buka, $p \in U$, dan $F : U \to \mathbb{R}^n$ pemetaan terdiferensial dengan syarat bahwa det $J(F)(p) \neq 0$. Maka ada $V \subseteq U$ buka dan $W \subseteq \mathbb{R}^n$ buka, sehingga $p \in V, F(p) \in W$, dan pemetaan restriksi $F : V \to W$ mempunyai invers $F^{-1} : W \to V$ yang terdiferensial.*

2.3. *Permukaan*

Definisi 2.7. *[2] Suatu subset S dari $\mathbb{R}^3$ adalah permukaan jika, untuk setiap titik $p \in S$, terdapat himpunan buka U di $\mathbb{R}^2$ dan himpunan buka $W \in \mathbb{R}^3$ yang memuat p sedemikian sehingga $S \cap W$ homeomorfik pada U.*

2.4. *Permukaan Lokal*

Definisi 2.8. *[3] Misalkan $V \subseteq \mathbb{R}^2$ buka. Pemetaan terdiferensial*

$$\mathbf{x} : V \to \mathbb{R}^n \tag{2.1}$$

disebut permukaan lokal jika, untuk $V \subseteq \mathbb{R}^2$ sembarang, ada $\tilde{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{R}^n$ terdiferensial, dengan $V \subseteq U$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, dan restriksi $\tilde{\mathbf{x}}|_V = \mathbf{x}$.

Definisi 2.9. *[3] Permukaan lokal $\mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^n$ dikatakan regular jika matriks Jacobi $J(x)(u, v)$ mempunyai rank dua untuk setiap $(u, v) \in U$, dan permukaan lokal dikatakan injektif, jika $\mathbf{x}$ adalah pemetaan 1-1.*

3. Pembahasan

3.1. *Permukaan Regular*

Telah diketahui apa itu permukaan pada Definisi 2.7 dan apa itu permukaan lokal pada Definisi 2.8, selanjutnya akan dijelaskan apa itu permukaan regular, dimana permukaan regular ini sacara umum dapat dikatakan gabungan dari beberapa dari permukaan lokal regular.

Definisi 3.1. *[2] Himpunan $S \subset \mathbb{R}^3$ disebut suatu permukaan regular jika untuk setiap $p \in S$, terdapat lingkungan V di $\mathbb{R}^3$ dan suatu pemetaan $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ yang bersifat pada, dengan U buka di $\mathbb{R}^2$ dan $V \cap S \subset \mathbb{R}^3$, sedemikian sehingga*

(1) $\mathbf{x}$ *terdiferensial.*
(2) $\mathbf{x} : U \to V \cap S$ *homeomorfisma.*
(3) Untuk setiap $q \in U$, diferensial $d\mathbf{x}_q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ satu-satu.

Pemetaan $\mathbf{x}$ disebut suatu parameterisasi atau suatu sistem lokal koordinat pada suatu lingkungan p. Lingkungan $V \cap S$ dari p di S disebut **lingkungan koordinat**.

Contoh 3.2. Akan ditunjukkan bahwa suatu bola satuan yang diberikan oleh

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

adalah permukaan regular dengan mendefinisikan pemetaan $\mathbf{x}_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dimana $\mathbf{x}_1$ adalah suatu parameterisasi dari S^2, yaitu

$$\mathbf{x}_1(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - (x^2 + y^2)})|(x, y) \in U,$$

dimana $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$.

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa parameterisasi $\mathbf{x}_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ terdiferensial. Perhatikan bahwa, $\dfrac{\partial x}{\partial x} = 1$, dan $\dfrac{\partial y}{\partial y} = 1$, jelas x, y memiliki turunan parsial yang kontinu. Kemudian akan ditunjukkan $\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ memiliki turunan parsial yang kontinu.

Misal $\sqrt{1-(x^2+y^2)} = z$, perhatikan bahwa z mempunyai turunan parsial yang kontinu untuk $x^2 + y^2 < 1$, yaitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}.\end{aligned}$$

Kondisi pada Definisi 3.1(3) sangat mudah diverifikasi dengan menunjukkan determinan dari salah satu Jacobian tidak sama dengan nol, perhatikan bahwa

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Untuk membuktikan kondisi Definisi 3.1(2), dari kondisi Definisi 3.1(1) dan Definisi 3.1(3) diketahui bahwa $\mathbf{x}_1(x,y)$ terdiferensial dan $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$. Misal $\mathbf{x}_1$ adalah satu-satu dan $\mathbf{x}_1^{-1}$ adalah pembatasan dari proyeksi $\pi(x,y,z) = (x,y)$ pada himpunan $\mathbf{x}_1(U)$, sehingga, $\mathbf{x}_1^{-1}$ kontinu pada $\mathbf{x}_1(U)$. Karena kondisi Definisi 3.1(1) – Definisi 3.1(3) terpenuhi, maka terbukti bahwa $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1\}$ adalah suatu permukaan regular.

Proposisi 3.3. *[2] Misal $p \in S$ suatu titik dari suatu permukaan regular S, dan misal $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ suatu pemetaan dengan $p \in \mathbf{x}(U)$ sedemikian sehingga Definisi 3.1(1) dan Definisi 3.1(3) terpenuhi. Asumsikan $\mathbf{x}$ adalah satu-satu, sehingga $\mathbf{x}^{-1}$ kontinu.*

Contoh 3.4. Diberikan suatu parameterisasi untuk bola satuan dari Contoh 3.2 dimana $V = \{(\theta,\varphi) | 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ dan $\mathbf{x} : V \to \mathbb{R}^3$ diberikan oleh

$$\mathbf{x}(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

dimana

$$\sin\theta\cos\varphi = x,\ \sin\theta\sin\varphi = y,\ \text{dan}\ \cos\theta = z.$$

Akan dibuktikan $\mathbf{x}$ adalah suatu parameterisasi dari S^2. Pertama akan ditunjukkan $\mathbf{x}$ kontinu. Perhatikan bahwa fungsi $\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta$ kontinu pada daerah asalnya, kemudian akan ditunjukkan fungsi $\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta$ memiliki turunan parsial yang kontinu. Perhatikan bahwa, turunan parsial $\sin\theta\cos\varphi$ terhadap θ adalah $\cos\theta\cos\varphi$, dan turunan parsial $\sin\theta\cos\varphi$ terhadap φ adalah $\sin\theta(-\sin\varphi)$, maka karena $\{(\theta,\varphi)|0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$, maka $\sin\theta\cos\varphi$ memiliki turunan parsial yang kontinu pada daerah asalnya, kemudian untuk $\sin\theta\sin\varphi$, memiliki turunan parsial terhadap θ yaitu $\cos\theta\sin\varphi$, dan turunan parsial terhadap φ yaitu $\sin\theta\cos\varphi$, jelas bahwa $\sin\theta\sin\varphi$ juga memiliki turunan parsial yang kontinu pada daerah asalnya, kemudian untuk $\cos\theta$ memiliki turunan parsial terhadap θ yaitu $-\sin\theta$ yang juga kontinu pada daerah asalnya, karena fungsi $\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta$ memiliki turunan parsial yang kontinu, maka $\mathbf{x}$ terdiferensial.

Kemudian perhatikan bahwa determinan dari setiap Jacobian

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\varphi)} = \cos\theta\sin\theta,$$
$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\varphi)} = \sin^2\theta\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(\theta,\varphi)} = \sin^2\theta\sin\varphi,$$

untuk hilang bersamaan, maka haruslah

$$\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta\cos^2\varphi + \sin^4\theta\sin^2\varphi = \sin^2\theta = 0,$$

Tetapi ini tidak terjadi di V, sehingga kondisi Definisi 3.1(1) dan Definisi 3.1(3) terpenuhi.

Kemudian, akan ditunjukkan $\mathbf{x}(\theta,\varphi)$ satu-satu. Misal diberikan $(x,y,z) \in S^2 - C$, dimana C adalah semi lingkaran yang diberikan oleh

$$C = \{(x,y,z) \in S^2 | y = 0, x \geq 0\}.$$

Perhatikan bahwa, jelas θ ditentukan secara unik, dimana $\cos\theta = z$ sehingga $\theta = \cos^{-1} z$ untuk $0 < \theta < \pi$. Dengan diketahuinya θ, maka diperoleh $\sin\varphi$ dan $\cos\varphi$ dari $x = \sin\theta\cos\varphi, y = \sin\theta\sin\varphi$, sedemikian sehingga φ juga unik dimana $(0 < \varphi < 2\pi)$. Jadi dapat disimpulkan bahwa $\mathbf{x}(\theta,\varphi)$ satu-satu, karena $\mathbf{x}(\theta,\varphi)$ satu-satu dan $\mathbf{x}(\theta,\varphi)$ kontinu, maka berdasarkan Proposisi 3.3, maka $\mathbf{x}(\theta,\varphi)$ memiliki invers yang kontinu, dan terbukti $\mathbf{x}(\theta,\varphi)$ adalah suatu parameterisasi dari S^2.

Proposisi 3.5. *[2] Jika $f : U \to \mathbb{R}$ adalah suatu fungsi yang terdiferensial pada himpunan buka U di $\mathbb{R}^2$, maka grafik dari f yaitu $(x,y,f(x,y)) \subset \mathbb{R}^3$ adalah permukaan regular dimana $(x,y) \in U$.*

Contoh 3.6. Misalkan diberikan suatu fungsi $f : U \to \mathbb{R}$, dimana $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$ dan U buka di $\mathbb{R}^2$. Akan ditunjukkan suatu grafik dari f yaitu $G_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}; (x,y) \in U\}$ adalah suatu permukaan regular.

Pertama akan ditunjukkan f terdiferensial. Perhatikan bahwa $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ mempunyai turunan parsial yang kontinu untuk $x^2 + y^2 < 1$, yaitu

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}}.$$

Karena f memiliki turunan parsial yang kontinu, maka f terdiferensial. Kemudian, karena f terdiferensial, maka terdapat lingkungan V_1 dari $z = f(x,y) \subseteq \mathbb{R}$, dan karena U buka di $\mathbb{R}^2$, maka terdapat lingkungan V_2 dari $(x,y) \subseteq U$, sehingga diperoleh suatu lingkungan V dimana $V = V_1 \times V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ yang merupakan suatu bola buka dengan pusat (x, y, z). Selanjutnya, karena f terdiferensial pada himpunan buka U di $\mathbb{R}^2$, maka berdasarkan Proposisi 3.5 terbukti bahwa G_f adalah suatu permukaan regular.

Definisi 3.7. *[2] Diberikan suatu pemetaan terdiferensial $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ yang terdefinisi pada himpunan buka U dari $\mathbb{R}^n$. Titik $p \in U$ disebut titik kritis dari F, jika turunan $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ adalah bukan pemetaan surjektif. Peta $F(p) \in \mathbb{R}^m$ dari titik kritis disebut nilai kritis dari F. Suatu titik dari $\mathbb{R}^m$ yang tidak termasuk nilai kritis disebut nilai regular dari F.*

Misalkan $f : U \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Suatu titik $x_0 \in U$ dikatakan kritis jika $f'(x_0) = 0$, yang mana turunan df_{x_0} membawa setiap vektor di $\mathbb{R}$ ke vektor nol. Catatan bahwa sebarang titik $a \notin f(U)$ secara sederhana adalah nilai regular dari f. [2]

Proposisi 3.8. *[2] Jika $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang terdiferensial dan $a \in f(U)$ adalah nilai regular dari f, maka $f^{-1}(a)$ adalah suatu permukaan regular di $\mathbb{R}^3$.*

Contoh 3.9. Akan dibuktikan bahwa suatu ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

adalah suatu permukaan regular.
Perhatikan bahwa ellipsoid di atas adalah suatu himpunan dari fungsi $f^{-1}(a)$, dimana didefinisikan suatu fungsi

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

dimana $(x, y, z) \in U \subset \mathbb{R}^3$, dan a, b dan $c \in \mathbb{R}$.
Pertama akan ditunjukkan $f(x, y, z)$ terdiferensial. Perhatikan bahwa $f(x, y, z)$ memiliki turunan parsial yang kontinu terhadap x, y, dan z berturut-turut yaitu $f_x = \frac{2x}{a^2}$, $f_y = \frac{2y}{b^2}$, $f_z = \frac{2z}{c^2}$. Karena $f(x, y, z)$ memiliki turunan parsial yang kontinu, maka $f(x, y, z)$ terdiferensial.
Kemudian akan dicari $a \in f(U)$ nilai regular dari f. Perhatikan bahwa $a \in f(U)$ adalah nilai regular dari $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jika dan hanya jika f_x, f_y, dan f_z tidak hilang secara bersamaan pada sebarang titik pada

$$f^{-1}(a) = \{(x, y, z) \in U | f(x, y, z) = a\}.$$

Misal pilih $a \in f(U)$ dimana $a = 0$, akan ditunjukkan $a = 0$ adalah nilai regular dari f.
Perhatikan bahwa, turunan parsial $f_x = \frac{2x}{a^2}, f_y = \frac{2y}{b^2}, f_z = \frac{2z}{c^2}$ hilang secara bersamaan hanya pada titik $(0, 0, 0)$, sehingga $(0, 0, 0)$ adalah titik kritis dari f dan diperoleh

$$f(0, 0, 0) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = -1,$$

dimana -1 adalah nilai kritis dari f. Diketahui bahwa suatu titik yang tidak termasuk nilai kritis disebut nilai regular. Misal pilih $a = 0$, perhatikan bahwa

$f(x, y, z) = 0$ jika dan hanya jika $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ haruslah sama dengan satu, karena $(x, y, z) \in U \subset \mathbb{R}^3$ dan $a, b, c \in \mathbb{R}$ maka pastilah terdapat $(x, y, z) \in U \subset \mathbb{R}^3$ dan $a, b, c \in \mathbb{R}$ yang menyebabkan $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ sama dengan 1. Maka berdasarkan Proposisi 3.8 terbukti bahwa $f^{-1}(a)$ dimana $a = 0$ adalah permukaan regular.

4. Kesimpulan

Dari analisa yang dilakukan, diperoleh beberapa karakteristik dari permukaan regular yaitu,

(1) Permukaan regular adalah suatu permukaan yang terbentuk dari beberapa lingkungan koordinat yang terdiferensial.
(2) Jika diketahui bahwa S suatu permukaan regular dan diberikan suatu parameterisasi yang dimisalkan dengan $\mathbf{x}$, maka untuk menunjukkan $\mathbf{x}$ memenuhi syarat suatu permukaan regular, tidak perlu menunjukkan bahwa $\mathbf{x}^{-1}$ kontinu, cukup menunjukkan kondisi satu dan tiga dari Definisi 3.1 dan menunjukkan $\mathbf{x}$ satu-satu.
(3) Grafik $M_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} | z = f(x, y)\}$ untuk $(x, y) \in U$ dari suatu fungsi yang terdiferensial $f : U \to \mathbb{R}$, dimana U buka di $\mathbb{R}^2$ adalah suatu permukaan regular.
(4) Jika terdapat suatu nilai regular $a \in f(U)$ dari fungsi terdiferensial $\mathbf{F} : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, maka $f^{-1}(a)$ adalah suatu permukaan regular.

5. Ucapan Terima kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Bapak Narwen, M.Si, Bapak Zulakmal, M.Si, dan Ibu Dr.Shelvi Ekariani yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

[1] Ghomi, Mohammad. 2004. *Lecture Notes on Differential Geometry*. Georgia Institute of Technology, Georgia.
[2] M.do Carmo. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surface*. Prentice-Hall, New Jersey.
[3] Pranoto, Iwan. 2004. *Pengenalan Geometri Diferensial*. Institut Teknologi Bandung, Bandung.
[4] Pressley, Andrew. 2001. *Elementary Differential Geometry*. Springer, London.